



DE ALGEMENE RELATIVITEITSTHEORIE VAN EINSTEIN

Afleidingen, Toepassingen en Beschouwingen

door
Albert Prins

Voorwoord

De algemene relativiteitstheorie van Albert Einstein roept, ook ruim een eeuw na haar publicatie, nog steeds veel vragen op. Van geïnteresseerde leken tot gevorderde studenten natuurkunde: velen zoeken naar een begrijpelijke, maar toch wiskundig onderbouwde uitleg van deze fascinerende theorie.

Met dat doel voor ogen is dit document tot stand gekomen. In deze tekst bieden we niet alleen een beknopte beschrijving van de theorie zelf, maar ook een systematische afleiding van de veldvergelijkingen die aan de basis liggen van Einsteins model van ruimte en tijd.

Daarnaast besteden we ruim aandacht aan experimenten die de theorie ondersteunen — waaronder de precessie van de baan van Mercurius, de afbuiging van licht door een zware massa, het beroemde experiment van Hafele & Keating en de toepassing van de Schwarzschild-oplossing op een klassieke kogelbaan. Elk voorbeeld is met zorg uitgewerkt, zowel kwalitatief als kwantitatief.

We hopen hiermee een brug te slaan tussen theorie en praktijk, tussen intuïtie en formalisme. En vooral: tussen verwondering en begrip.

Dit document is online beschikbaar via:

Nederlandse versie:

http://www.prinikx.synology.me/familyprins/Astronomy/GR/AlgemeneRelativiteit_AlbertPrins.pdf

en

https://saya-pangeran.github.io/familyprins/astromy/GR/AlgemeneRelativiteit_AlbertPrins.pdf

Engelse versie:

http://www.prinikx.synology.me/familyprins/Astronomy/GR/GeneralRelativity_AlbertPrins.pdf

https://issuu.com/aprins6/docs/generalrelativity_albertprins_pag1-pag48

Ik waardeer alle vormen van feedback. Suggesties, opmerkingen of correcties zijn van harte welkom via:

aprins@hotmail.com

Met vriendelijke groet,

Albert Prins

Inhoudsopgave

1	Inleiding	9
2	Beknopte beschrijving van de Algemene Relativiteitstheorie	10
2.1	Het Equivalentieprincipe	11
2.2	Kromming van Ruimte-Tijd.....	13
2.2.1	Onafhankelijkheid van het Gekozen Coördinatenstelsel	14
2.3	Covariante en Contravariante Vektoren en Duale-Vektoren	17
2.4	Covariante en Contravariante Transformaties van Tensoren	20
2.4.1	Covariante Tensoren	21
2.4.2	Contravariante Tensoren.....	21
2.4.3	Gemengde Tensoren	22
2.4.4	Opmerkingen en samenvatting	22
2.5	Afleiding van het Christoffel Symbool en de Covariante Afgeleide	23
2.5.1	Basisdefinitie van het Christoffel-symbool.....	23
2.5.2	Covariante Afgeleide	26
2.5.2.1	Covariante Afgeleide voor een Contravariante Vector	29
2.5.2.2	Covariante Afgeleide voor een Covariante Vector	30
2.5.3	Relatie met Tensor	32
2.5.3.1	Covariante Differentiatie voor een Covariante Tensor	34
2.5.3.2	Covariante Differentiatie voor een Contravariante Tensor.....	35
2.5.3.3	Covariante Differentiatie voor een Gemengde Tensor	37
2.6	Geodetische Vergelijking en Christoffel-symbolen	38
2.7	Christoffel-Symbolen uitgedrukt in termen van de Metrische Tensor	41
2.8	Geodetische Vergelijking in de Newtoniaanse Limiet.....	44
2.9	Generaliseren van de Definitie van de Metrische Tensor	48
2.10	De Riemann-Krommingstensor	50
2.10.1	Afleiding via de Commutator van de Covariante Afgeleiden.	51
2.10.1.1	Covariante Afgeleide Commutator.....	51
2.10.1.2	Afleiding van de Riemann-Tensor.....	52
2.10.1.3	Alternatieve Afleiding van de Riemann-Tensor via de Commutator.....	54
2.10.2	Afleiding van de Riemann-Tensor via Geodetische Deviatie.....	56

2.11	Symmetrieën en Onafhankelijke Componenten	62
2.12	Bianchi-Identiteit en Ricci Tensor	65
2.12.1	De Ricci-Tensor	66
2.12.2	De Ricci-Scalar	67
2.13	Energie-Impuls Tensor	67
2.13.1	Fysische Betekenis van de Energie-Impuls-Tensor	69
2.13.2	Covariante Differentiatie van de Energie-Impuls-Tensor	71
2.14	Einstein Tensor	71
2.14.1	Eerste Poging met de Ricci-Tensor als Oplossing	72
2.14.2	Tweede Poging	74
2.15	Einstein-Veldvergelijkingen	75
2.15.1	De Alternatieve Vorm van Einstein's Vergelijking	77
2.15.2	Newtoniaanse Limiet	78
2.16	Samenvatting van de Eindformule voor de Algemene Relativiteitstheorie	80
2.17	Schwarzschild-Metriek	85
2.17.1	Besprekingen over de Schwarzschild-Metriek	85
2.18	Experimenten	102
3	Experimenten ter bevestiging van Einsteins Theorie	103
3.1	Experiment 1 - Het Hafele & Keating-experiment met de Schwarzschild-vergelijking	103
3.1.1	Eerst de benaderde aanpak	105
3.1.2	Uitwerking van V_1 en V_2 in Vergelijking (13)	108
3.1.3	De Exacte Afleiding	110
3.1.4	De Snelheid van een Stilstaand Punt op de Evenaar aan het Aardoppervlak	114
3.1.5	Correctie op afleiding gebaseerd op Paul Anderson	115
3.1.6	Overwegingen over het Hafele & Keating-experiment en de Schwarzschild-vergelijking	121
3.2	Experiment 2 - Beweging van Deeltjes in Schwarzschild-geometrie	122
3.2.1	Het Gravitatiepotentiaal	128
3.2.2	Intermezzo over Energie	130
3.2.3	Experiment 3 - Afbuiging van Licht	133
3.2.3.1	Benaderingen en Integratie	138
3.2.4	Experiment 4 - Precessie van de Periheliën (Mercurius)	140
3.2.4.1	We Controleren de Eerste Integraal	149

3.2.4.2	Uitwerking van de Tweede Integraal in het Vorige Hoofdstuk.	151
3.2.4.3	Alternatieve Oplossing voor Integraal 1.	151
3.2.4.4	Gedetailleerde Berekening van de Tijd T van een Omwenteling.	152
3.3	Experiment 5 - Shapiro Tijdvertraging – Hobson en anderen	154
3.4	Tijdsrelatie tussen Waarnemer op Aarde en het Centrum van de Zon.....	162
3.5	Banen van Massieve Deeltjes - Tweede Afleiding.....	164
3.6	Experiment 6 - Berekening van de Baan van een Kogel	171
3.6.1	Via Newton-Benadering	171
3.6.2	Via Schwarzschild-Benadering.....	173
4	Coördinatensystemen	180
4.1	Rechthoekig Coördinatensysteem.....	180
4.2	Niet-Rechthoekig Coördinatensysteem	180
4.3	Gekromde Coördinaten	181
4.4	Algemene Vorm voor een Coördinatensysteem	181
4.5	Transformatie tussen twee Coördinatensystemen	183
4.5.1	Uitgebreide Toelichting op de Metrische Tensor	183
4.6	Transformatie tussen Cartesiaanse en Polaire (infinitesimale) Coördinaten.....	184
4.7	Oefening om de Metrische Transformatieformule formeel toe te passen:.....	186
4.8	Verdere Overwegingen over Co- en Contravariante Transformaties	189
4.8.1	Inleiding	189
4.8.2	Covariante Transformatie van Basisvectoren en Duale Vectoren (of één-vormen):	189
4.8.2.1	Inverse Transformatie	189
4.8.2.2	Controle van de Inverse Transformatie.....	190
4.8.2.3	Conclusie.....	191
4.8.3	Contravariante Transformatie van Vectoren:	191
4.8.4	Samenvatting:.....	193
4.9	Overwegingen over de Minkowski- en Schwarzschild-formules.....	193
4.9.1	Minkowski.....	193
4.9.2	Transformaties uitgevoerd door Schwarzschild	196
4.10	Schwarzschild's: "On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory"	197
5	Controle of de Schwarzschild Metriek voldoet aan de Einstein Veldvergelijkingen	199
5.1	Controle van R_{00} , R_{11} , R_{22} en R_{33} met Sferische Coördinaten van Schwarzschild.....	201

5.2	Controle van R_{00} , R_{11} , R_{22} en R_{33} met t , x , y en z coördinaten volgens Schwarzschild	203
6	Controle of de Schwarzschild-elementen voldoen aan de Einstein-veldvergelijkingen volgens de gelimiteerde formule.....	205
6.1	t,x,y,z (aangepaste polaire) Coördinaten	205
6.2	Sferische Coördinaten	207
7	Antwoorden op Vragen	210
7.1	Afleiding van de Schwarzschild-formule naar Tau (eigen tijd)	210
7.2	Toelichting op de Transformatieformule van Einstein	211
7.3	Antwoord op vragen betreffende Schwarzschild	212
7.4	Gedetailleerde afleiding van de Einstein-vergelijking (57) vanuit vergelijking (53)	217
7.5	Vraag over vergelijking in Einstein's origineel werk (Engelse versie)	221
7.6	Vraag over Einstein's vergelijking (69).....	222
Appendix 1	Formules van de Algemene Relativiteitstheorie	224
Appendix 1.1	Samenvatting en afleiding van verdere relevante formules:	225
Appendix 1.2	Schwarzschild Metriek – Polaire Coördinaten.....	227
Appendix 1.3	Schwarzschild Metriek - x,y,z Coördinaten.....	229
Appendix 2	Afleiding van Afgeleide van de Christoffelsymbolen in een Algemene Vorm.....	232
Appendix 3	Wiskundige Uitwerking van Schwarzschild	232
Appendix 4	Afleiding van de Stelling van Gauss	234
Appendix 5	Afleiding van de Laplace- en Poisson-vergelijkingen.....	236
Appendix 5.1	De <i>Laplace-operator</i> toegepast op het Zwaartekrachtspotential van een Statische Bol....	238
Appendix 5.1.1	Buiten een Bol (Laplace)	239
Appendix 5.1.2	Binnen een Bol (Poisson)	240
Appendix 5.1.3	Vereenvoudiging van de Toepassing van de Laplace-/Poisson-operator	240
Appendix 5.1.4	Afleiding van de Gravitatiepotential Binnen een Statische Bol	242
Appendix 6	Getijdenkrachten.....	244
Appendix 7	Speciale Relativiteitstheorie	245
Appendix 7.1	Eenvoudige Afleiding van de Lorentztransformatie	245
Appendix 7.2	Alternatieve afleiding van tijddilatatie en lengtecontractie.....	249
Appendix 7.3	Goniometrische Hulpmiddelen.....	251
Appendix 7.4	Optelling van snelheden	253
Appendix 7.5	Botsingen	255

Appendix 7.6	De afleiding van $E=mc^2$	257
Appendix 7.7	De Energie van een Bewegend Object	259
Appendix 7.8	Energie-Impulsvector.....	260
Appendix 7.8.1	Alternatieve afleiding van de Energie-Impuls-Massa relatie.....	262
Appendix 7.8.2	Klassiek Bewijs van Energieconservatie.....	262
Appendix 7.9	Toepassingen	263
Appendix 7.9.1	Kernfusie en Kernsplijting	263
Appendix 7.9.2	Elektrische Auto Rijden op 1 gram Waterstof door middel van Kernfusie.....	264
Appendix 7.10	Relativistische elektromagnetisme	268
Appendix 7.10.1	Inleiding	268
Appendix 7.10.2	Berekeningen	268
Appendix 7.10.3	Conclusie.....	272
Appendix 8	Specifiek Hoekmoment	273
Appendix 9	Overwegingen over Rotatie.....	275
Appendix 9.1	Inleiding	275
Appendix 9.2	Impuls	275
Appendix 9.3	Cirkel.....	275
Appendix 9.4	Rotatie van een Bol.....	276
Appendix 9.5	Relatie tussen Hoekmoment en Energie	277
Appendix 10	Afleiding van de Euler-Lagrange-vergelijking	278
9	Bibliografie.....	283
10	Interessante websites:.....	284

DE ALGEMENE RELATIVITEITSTHEORIE VAN EINSTEIN

Afleidingen, Toepassingen en Beschouwingen

door
Albert Prins

1 Inleiding

De algemene relativiteitstheorie (AR), in 1915 gepubliceerd door Albert Einstein, vormt een van de fundamenteën van onze moderne kijk op ruimte, tijd en zwaartekracht. Deze theorie vervangt het klassieke zwaartekrachtmodel van Newton door een elegant, geometrisch beeld: massa en energie vervormen de ruimtetijd, en objecten volgen de krommingen van die ruimtetijd — een concept dat diepgaande implicaties heeft voor zowel fundamentele natuurkunde als kosmologie.

Doel van dit document

Het doel van dit document is om een overzicht te geven van de algemene relativiteitstheorie, met nadruk op:

- Het zorgvuldig afleiden van de wiskundige structuur achter de theorie.
- Het onderzoeken van praktische toepassingen en experimenten die de theorie ondersteunen.
- Het beantwoorden van veelgestelde vragen over concepten en formules binnen de AR.

Aanpak

De aanpak in dit document verschilt van populaire beschrijvingen. We richten ons op:

- Grondige afleidingen van tensoranalytische vergelijkingen.
- Een zorgvuldige behandeling van coördinatentransformaties.
- Toepassing van de Schwarzschild-oplossing op klassieke experimenten zoals het Hafele–Keating-experiment, de afbuiging van licht door zwaartekracht, en de precessie van Mercurius.

We behandelen ook hoe de Schwarzschild-oplossing voldoet aan de veldvergelijkingen van Einstein, en hoe ruimte-tijd kromming wiskundig tot uitdrukking komt in termen van metriek en Christoffelsymbolen.

Voor wie is dit document bedoeld?

Dit document is geschreven voor:

- (Geo)fysici en wiskundigen met interesse in de achterliggende structuur van de AR.
- Studenten natuurkunde die dieper willen graven dan standaard leerboeken.
- Iedereen die wil begrijpen *waarom* de vergelijkingen zijn zoals ze zijn — en niet alleen *hoe* ze werken.

Tot slot

We hopen met dit werk een brug te slaan tussen theorie en praktijk, tussen formalisme en inzicht. Elk hoofdstuk bouwt voort op het vorige, maar waar mogelijk zijn secties ook zelfstandig te lezen. De bijlagen bieden aanvullende uitleg, alternatieve afleidingen, en toepassingen in de context van de speciale relativiteitstheorie en zelfs kernfysica.

2 Beknopte beschrijving van de Algemene Relativiteitstheorie

Voordat Einstein in 1915 zijn beroemde algemene relativiteitstheorie formuleerde, ontwikkelde hij in 1905 eerst de **speciale relativiteitstheorie** (zie [Appendix 7](#)). In deze theorie beschouwde hij uitsluitend coördinatenstelsels die zich uniform bewegen, dat wil zeggen met constante snelheid ten opzichte van elkaar. De invloed van massa's — en dus zwaartekracht — werd daarin nog buiten beschouwing gelaten.

De speciale relativiteitstheorie is gebaseerd op twee fundamentele uitgangspunten:

1. De lichtsnelheid in vacuüm is in elk coördinatenstelsel gelijk en bedraagt:

$$C = 299\,792\,458 \text{ m/s.}$$

2. De natuurwetten zijn geldig in elk inert (niet versnellend) bewegend coördinatenstelsel.

In de klassieke theorie van Newton werd aangenomen dat de tijd universeel is: tijdsintervallen zijn gelijk in zowel stilstaande als bewegende stelsels. De speciale relativiteitstheorie toonde echter aan dat dit niet klopt. In een bewegend stelsel verlopen de tijdsintervallen **langzamer** dan in een stilstaand stelsel — een effect dat bekendstaat als **tijddilatatie**.

Ook de lengte van een object verandert onder invloed van beweging: deze neemt af ten opzichte van de oorspronkelijke lengte in rust. Dit effect heet **lengtecontractie**. Beide verschijnselen worden uitgebreid behandeld in [Appendix 7](#).

Deze resultaten zijn directe consequenties van het feit dat de lichtsnelheid constant is voor alle waarnemers, ongeacht hun snelheid. Omdat tijd en ruimte afhankelijk blijken te zijn van het gekozen stelsel, verenigde Einstein deze grootheden in één geheel: de **ruimte-tijd**.

Een van de bekendste uitkomsten van deze theorie is de beroemd geworden massa-energie relatie:

$$E = mc^2$$

waarin energie en massa als equivalent worden beschouwd, (zie [Appendix 7.6](#)).

In een volgend stadium richtte Einstein zich op een uitbreiding van zijn theorie naar **versnelde stelsels** en de invloed van massa's. Dit leidde in 1915 tot de formulering van de **algemene relativiteitstheorie**, waarin zwaartekracht niet wordt gezien als een kracht, maar als een gevolg van de kromming van de ruimte-tijd.

Voor een eerste indruk van de uiteindelijke veldvergelijkingen van Einstein verwijzen we naar hoofdstuk [2.16](#), waar een samenvatting van de eindformule wordt gegeven. De komende hoofdstukken zullen stap voor stap de concepten en wiskundige afleidingen bespreken die leiden tot deze resultaten.

2.1 *Het Equivalentieprincipe*

Door de invloed van massa's te bestuderen, formuleerde Newton de wet van de zwaartekracht en liet hij zien hoe massa's een versnelling ondervinden als gevolg van deze kracht.

Wanneer we zwaartekracht vergelijken met andere fundamentele krachten, zoals de elektrische en magnetische krachten, zien we duidelijke overeenkomsten, maar ook belangrijke verschillen. We zullen eerst kijken naar hoe die krachten ontstaan, en welke versnelling ze veroorzaken.

Elektrische kracht

Voor de elektrische kracht geldt dat q_1 en q_2 ladingen zijn van twee deeltjes. Deze deeltjes trekken elkaar aan of stoten elkaar af, afhankelijk van het teken van hun lading. De afstand tussen de twee deeltjes is r , en k_e is de elektrische constante. De kracht tussen de ladingen leidt tot een versnelling, die afhankelijk is van de polariteit en de massa van de deeltjes.

Volgens de wet van Coulomb is de elektrische kracht tussen twee elektrisch geladen deeltjes:

$$F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

De kracht veroorzaakt een versnelling a_1 bij een deeltje met massa m_1 en lading q_1 , in het veld van de q_2 :

$$F = m_1 a_1 = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow a_1 = k_e \frac{q_1 q_2}{m_1 r^2}$$

Er is dus een aantrekkingskracht tengevolge van de ladingen, maar de versnelling wordt bepaald door zowel de grootte van de massa's als de aantrekkingskracht.

Magnetische kracht

Ook magnetische krachten veroorzaken versnelling. Deze versnelling hangt af van het teken van de lading, de oriëntatie van het magnetisch veld en de massa van de deeltjes.

Zwaartekracht

Als we nu de zwaartekracht tussen twee objecten met massa m_1 en m_2 beschouwen, krijgen we volgens Newton:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Waarbij G de gravitatieconstante is en r de afstand tussen de twee massa's.

Op basis van analogie met de elektrische kracht zouden we een onderscheid kunnen verwachten tussen een *gravitatie massa* m_{grav} , die de kracht veroorzaakt, en een *inertiële massa* m_{inert} , die de versnelling ondergaat. De vergelijking zou dan worden:

$$F = m_{inert,1} \cdot a_1 = G \frac{m_{grav,1} \cdot m_{grav,2}}{r^2} \Rightarrow a_1 = G \frac{m_{grav,1} \cdot m_{grav,2}}{m_{inert,1} r^2}$$

Op het eerste gezicht is er geen reden waarom $m_{inert,1} \equiv m_{grav,1}$ zou gelden. Maar uit nauwkeurige experimenten, onder andere van Eötvös (ca. 1885), blijkt dat deze twee massa's altijd exact gelijk zijn.

Een belangrijk verschil met de elektrische kracht is dat er bij zwaartekracht **geen positief of negatief** bestaat: de kracht tussen twee massa's is altijd **aantrekkend**.

Dankzij deze gelijkheid tussen gravitatie- en inertiemassa geldt:

$$F = ma = G \frac{mM}{r^2} \Rightarrow a = G \frac{M}{r^2}$$

De massa m van het vallende object valt weg, waardoor de versnelling uitsluitend afhangt van M , de massa van het aantrekkende lichaam (bijvoorbeeld de Aarde). Dit betekent dat alle objecten, los van hun massa, met **dezelfde versnelling vallen** — mits luchtweerstand wordt verwaarloosd. (zie ook de Opmerking aan het einde van dit hoofdstuk.)

Dit leidt tot de conclusie dat de beweging van een object in een zwaartekrachtveld **niet wordt bepaald door zijn eigen massa**, maar door de eigenschappen van de ruimte waarin het zich beweegt.

Het gedachte-experiment van Einstein

Geïnspireerd door deze observatie, stelde Einstein zich twee situaties voor:

1. Iemand staat stil op de Aarde en ervaart een zwaartekrachtsversnelling g (in m/s^2),
2. Iemand bevindt zich in een raket, ver van massa's, die versnelt met precies diezelfde g .

Volgens Einstein kunnen deze twee situaties **lokaal niet van elkaar worden onderscheiden** — de persoon voelt in beide gevallen precies hetzelfde. Dit inzicht leidde tot het **equivalentieprincipe: zwaartekracht en traagheid zijn lokaal equivalent**.

Einstein concludeerde hieruit dat zwaartekracht **geen kracht** is, maar een gevolg van de **kromming van de ruimte-tijd** door de aanwezigheid van massa. Dit is het hart van de algemene relativiteitstheorie.

Opmerking

Het object met massa m oefent ook een kracht uit op het andere object M , waardoor deze ook een versnelling krijgt:

$$F = Ma = G \frac{mM}{r^2} \Rightarrow a = G \frac{m}{r^2}$$

Maar aangezien meestal $M \gg m$, is de versnelling van M ten gevolge van m verwaarloosbaar klein. De krachten zijn weliswaar gelijk in grootte en tegengesteld in richting (volgens de derde wet van Newton).

In de klassieke theorie oefenen alleen massa's kracht op elkaar uit. Dat impliceert dat een massa **geen invloed** zou hebben op massaloze deeltjes zoals fotonen.

De algemene relativiteitstheorie stelt echter dat massa's de ruimte-tijd krommen, en dat **alle** objecten — zelfs massaloze — deze kromming volgen. Dus ook licht buigt af in een zwaartekrachtsveld.

Bevestiging door observatie

In 1919 bevestigde Arthur Eddington dit voorspelde effect experimenteel, tijdens een zonsverduistering. Hij toonde aan dat sterren, zichtbaar nabij de rand van de verduisterde zon, verschoven leken — precies zoals Einstein had voorspeld.

De wiskundige afleiding van deze afbuiging van licht volgt later in [Experiment 3](#) - .

2.2 Kromming van Ruimte-Tijd

Om het belang van de overgang van het klassieke zwaartekrachtsmodel van Newton naar het geometrische model van Einstein te begrijpen, benaderen we het onderwerp eerst op een alternatieve, meer intuïtieve manier.

Stel een deeltje voor dat zich in de vrije ruimte bevindt, ver weg van massa's en zonder invloed van externe krachten. In zo'n situatie blijft het deeltje zich voortbewegen met constante snelheid en in een rechte lijn — een principe dat al rond 1600 werd beschreven door **Galileo Galilei**.

Wanneer we de ruimte-tijd voorstellen als opgebouwd uit rechthoekige rasterlijnen — een ruimtelijk referentiekader zonder kromming — dan volgt het deeltje zijn pad als een rechte lijn langs dit raster. Er is niets dat het afwijkt van zijn initiële richting of snelheid.

Einstein stelde echter dat dit beeld verandert zodra een **grote massa** aanwezig is. Die massa vervormt de structuur van de ruimte-tijd, waardoor de "rechte" lijnen van het raster **gekromd** raken. In plaats van dat de zwaartekracht als een kracht optreedt, beweegt het deeltje **vanzelf** langs deze gekromde lijnen.

Hoe dichterbij de massa komt, hoe meer het pad afwijkt van zijn eerdere rechte lijn. Toch voelt het deeltje geen kracht: het beweegt vrij, maar volgt wel de kromming van de ruimte. Dit pad blijkt een soort "rechte lijn" binnen de kromming te zijn, en wordt later in dit document aangeduid als een **geodetische lijn**.

In de algemene relativiteitstheorie is er dus geen zwaartekracht zoals bij Newton, maar ontstaat het effect van zwaartekracht uit de geometrie van de ruimte-tijd zelf.

Van kracht naar geometrie

De uitdaging waar Einstein zich voor gesteld zag, was het vinden van een wiskundige beschrijving van deze kromming. Hij zocht een manier om de geometrie van de ruimte-tijd uit te drukken **als functie van massa en energie**, waarbij die beschrijving **onafhankelijk zou zijn van het gekozen coördinatenstelsel**.

Dit betekende dat hij een volledig **coördinaat-onafhankelijke** formulering zocht, zodat de natuurwetten in elk stelsel dezelfde vorm behouden — een centraal principe in de algemene relativiteitstheorie.

De gevolgen van massa en energie op de geometrie zouden uiteindelijk worden vastgelegd in de zogenaamde **Einstein-veldvergelijkingen**. Deze vergelijkingen beschrijven hoe materie de ruimte-tijd kromt, en hoe die gekromde ruimte-tijd op zijn beurt bepaalt hoe materie zich beweegt.

Vervolg

In de komende hoofdstukken zullen we de denkrichting van Einstein stap voor stap volgen. Daarbij zullen we geleidelijk toewerken naar de afleiding van de veldvergelijkingen die de kern vormen van de algemene relativiteitstheorie.

2.2.1 Onafhankelijkheid van het Gekozen Coördinatenstelsel

Om de positie van een punt in de ruimte te bepalen, hebben we altijd een referentie nodig — een oorsprong waaruit we afstanden meten. Een gebruikelijke methode is het kiezen van een **Cartesiaans coördinatenstelsel**, met drie onderling loodrechte assen: de x-as, y-as en z-as.

We kunnen de locatie van een punt beschrijven met coördinaten (x, y, z) , waarbij deze waarden de afstanden voorstellen tot de oorsprong langs respectievelijk de x-, y- en z-as. De afstand van dat punt tot de oorsprong is dan, volgens de stelling van Pythagoras:

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Wanneer we een ander coördinatenstelsel kiezen (met een andere oorsprong of rotatie), veranderen de coördinaatwaarden en dus ook s . Maar als we niet de absolute positie van één punt beschouwen, maar juist de **kleine afstand tussen twee nabije punten**, dan blijft die afstand invariant onder coördinatentransformaties.

Deze differentiële afstand duiden we aan met:

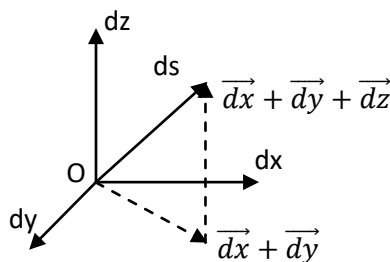
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Deze formule is toepasbaar in een orthogonaal, vlak, Cartesiaans stelsel. Maar om het algemener te maken — ook voor situaties waarin de assen niet noodzakelijk loodrecht staan — moeten we een meer fundamentele benadering gebruiken via vectoranalyse.

Vectorbenadering van afstand

We kunnen de differentiële afstand ds opvatten als de som van drie vectorcomponenten:

$$\vec{ds} = \vec{dx} + \vec{dy} + \vec{dz}$$



De grootte ds van de vector $\vec{ds}$ vinden we via het inwendig product $\vec{ds} \cdot \vec{ds}$:

$$ds^2 = \vec{ds} \cdot \vec{ds} = (\vec{dx} + \vec{dy} + \vec{dz}) \cdot (\vec{dx} + \vec{dy} + \vec{dz})$$

Ter herinnering: het inwendig product van twee vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$ is:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\varphi)$$

waar φ de hoek is tussen de twee vectoren.

En dus

$$\vec{ds} \cdot \vec{ds} = ds^2 \cos(0) = ds^2$$

Voor het volledige inwendig product van $\vec{ds}$ krijgen we:

$$ds^2 = \vec{dx} \cdot \vec{dx} + \vec{dx} \cdot \vec{dy} + \vec{dx} \cdot \vec{dz} + \vec{dy} \cdot \vec{dx} + \vec{dy} \cdot \vec{dy} + \vec{dy} \cdot \vec{dz} + \vec{dz} \cdot \vec{dx} + \vec{dz} \cdot \vec{dy} + \vec{dz} \cdot \vec{dz}$$

In een **orthogonaal stelsel** verdwijnen de kruisproducten zoals $\vec{dx} \cdot \vec{dy}$, omdat de hoeken tussen de assen 90° zijn en $\cos(90^\circ) = 0$. In dat geval krijgen we eenvoudig:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

In een **niet-orthogonaal coördinatenstelsel** zijn de hoeken tussen de assen niet noodzakelijk 90° , waardoor ook de kruisproducten meetellen. De algemene vorm wordt dan:

$$ds^2 = g_{xx} dx^2 + g_{xy} dx dy + g_{xz} dx dz + g_{yx} dy dx + g_{yy} dy^2 + g_{yz} dy dz + g_{zx} dz dx + g_{zy} dz dy + g_{zz} dz^2 \quad (1)$$

De coëfficiënten g_{ij} geven informatie over de onderlinge oriëntatie van de assen, en vormen samen de **metrische tensor** g_{ij} .

Uitbreiding naar ruimte-tijd

Einstein wilde een nog algemenere formulering, voor een vierdimensionaal stelsel bestaande uit **één tijd-as en drie ruimte-assen**. Deze assen hoeven niet orthogonaal te zijn, en bovendien kan de metriek per punt in de ruimte-tijd verschillen.

De algemene uitdrukking voor het kwadraat van de ruimte-tijd-interval luidt dan:

$$ds^2 = \sum_{\mu} \sum_{\nu} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

Waarin:

- $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$,
- $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$
- $g_{\mu\nu}$ de componenten zijn van de **vierdimensionale metrische tensor**.

In de **Einstein-notatie** (waar automatisch wordt gesommeerd over herhaalde indices, ook wel “dummy-indices” genoemd), wordt dit vereenvoudigd tot:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{2}$$

Uitwerking van de som

Wanneer we vergelijking (2) volledig uitschrijven voor alle waarden van μ en ν , krijgen we:

$$\begin{aligned} ds^2 = & g_{00}dx^0dx^0 + g_{01}dx^0dx^1 + g_{02}dx^0dx^2 + dg_{03}dx^0dx^3 + \\ & g_{10}dx^1dx^0 + g_{11}dx^1dx^1 + g_{12}dx^1dx^2 + dg_{13}dx^1dx^3 + \\ & g_{20}dx^2dx^0 + g_{21}dx^2dx^1 + g_{22}dx^2dx^2 + dg_{23}dx^2dx^3 + \\ & g_{30}dx^3dx^0 + g_{31}dx^3dx^1 + g_{32}dx^3dx^2 + dg_{33}dx^3dx^3 \end{aligned} \tag{3}$$

Dit is de vierdimensionale tegenhanger van vergelijking (1), die we eerder voor een driedimensionale ruimte opstelden. (Voor meer gedetailleerde informatie zie hoofdstuk [4](#))

Opmerking over symmetrie

De metrische tensor $g_{\mu\nu}$ is **symmetrisch**, wat betekent:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

Daarom bevat de tensor slechts 10 onafhankelijke componenten in plaats van 16. Dit maakt de tensor wiskundig elegant en computationeel beheersbaar.

Samengevat

- De afstand tussen twee infinitesimaal nabije punten in ruimte-tijd wordt niet beïnvloed door de keuze van het coördinatenstelsel.
- In algemene relativiteit wordt deze afstand uitgedrukt via de **metrische tensor**, die rekening houdt met zowel kromming als niet-orthogonaliteit.
- Einstein ontwikkelde een compacte, coördinaat-onafhankelijke formulering die centraal staat in de beschrijving van zwaartekracht als geometrisch verschijnsel.

Voor een verdere verdieping in tensoren, metriek en hun toepassing op specifieke gevallen zoals de Schwarzschild-oplossing, verwijzen we naar **hoofdstuk 4**)

2.3 Covariante en Contravariante Vectoren en Duale-Vectoren

In de algemene relativiteitstheorie komen de begrippen **contravariant** en **covariant** regelmatig voor. In dit hoofdstuk lichten we deze concepten toe en laten we zien hoe ze ontstaan uit de manier waarop vectoren en velden zich gedragen onder coördinantentransformaties.

Zoals eerder besproken, moeten fysische grootheden — zoals vectoren, tensoren en velden — onafhankelijk zijn van het gekozen coördinatenstelsel. Wanneer het handig is om over te schakelen naar een ander stelsel (bijvoorbeeld door rotatie of translatie), moeten de onderliggende eigenschappen van die grootheden behouden blijven. De componenten ervan zullen echter transformeren.

Scalars, vectoren en velden

Een **scalaire grootheid**, zoals temperatuur, heeft op elke locatie een waarde maar geen richting. Een verzameling van scalars over de ruimte vormt een **scalair veld**. Wanneer dit veld een richtingsgevoelige verandering vertoont (bijvoorbeeld een temperatuurstijging in een bepaalde richting), kunnen we daarvan een **afgeleide** nemen — deze afgeleide gedraagt zich als een vector. In dit specifieke geval spreken we van een **duale vector**.

Een duale vector is afhankelijk van het gebruikte coördinatenstelsel: als we transformeren, veranderen de componenten van de vector zó dat het geheel consistent blijft. Deze componenten transformeren *mee* met het nieuwe stelsel, en worden daarom **covariant** genoemd.

Een gewone vector (zoals snelheid of versnelling) gedraagt zich juist anders: wanneer het coördinatenstelsel verandert, blijven de vectoren fysiek gelijk, maar hun componenten moeten in **tegengestelde richting** veranderen om dat te compenseren. Zulke vectoren worden **contravariant** genoemd.

Notatie en definities

Om onderscheid te maken tussen beide soorten vectoren, wordt conventioneel het volgende gebruikt:

- Een **contravariante vector** heeft een **bovenindex**:

$$A^\mu$$

- Een **covariante vector** heeft een **onderindex**:

$$A_\mu$$

Deze zijn aan elkaar gerelateerd via de metrische tensor, en voldoen aan:

$$A_\mu A^\mu = I$$

Transformaties tussen coördinatenstelsels

Stel dat we werken in een coördinatenstelsel met x^m als coördinaten ($m = 0, 1, 2, 3$), en we transformeren naar een ander stelsel met coördinaten y^n . Dan geldt voor de transformatie:

$$y^n = \frac{\partial y^n}{\partial x^0} x^0 + \frac{\partial y^n}{\partial x^1} x^1 + \frac{\partial y^n}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial y^n}{\partial x^3} x^3$$

In **Einstein notatie** wordt dit:

$$y^n = \frac{\partial y^n}{\partial x^m} x^m$$

Waarbij $n, m = 0, 1, 2, 3$.

Voorbeeld: afgeleide van een scalaire functie

Beschouw een scalaire functie φ . Dan is de differentiaal:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} dx^m$$

of volledig uitgeschreven:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} dx^3$$

In het nieuwe coördinatenstelsel y^n gebruiken we de kettingregel om de duale vector (de afgeleide) te transformeren:

$$\frac{d\varphi}{dy^n} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^m} \frac{dx^m}{dy^n}$$

Dus de componenten transformeren als:

$$A_n^{(y)} = \frac{dx^m}{dy^n} B_m^{(x)} \quad (1)$$

Hier is:

- $A_n^{(y)} = \frac{d\varphi}{dy^n}$: de **covariante** vector in het y -stelsel,
- $B_m^{(x)} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^m}$: de covariante vector in het x -stelsel.

We noemen dit een **covariante transformatie**.

Volledig uitgeschreven (matrixvorm)

In matrixvorm ziet vergelijking (1) er als volgt uit:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} \frac{dx^0}{dy^0} & \frac{dx^1}{dy^0} & \frac{dx^2}{dy^0} & \frac{dx^3}{dy^0} \\ \frac{dx^0}{dy^1} & \frac{dx^1}{dy^1} & \frac{dx^2}{dy^1} & \frac{dx^3}{dy^1} \\ \frac{dx^0}{dy^2} & \frac{dx^1}{dy^2} & \frac{dx^2}{dy^2} & \frac{dx^3}{dy^2} \\ \frac{dx^0}{dy^3} & \frac{dx^1}{dy^3} & \frac{dx^2}{dy^3} & \frac{dx^3}{dy^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}_x$$

Contravariante transformatie

Voor contravariante vectoren is de transformatieformule het omgekeerde:

$$W_{(y)}^n = \frac{dy^n}{dx^m} B_{(x)}^m$$

Volledig uitgeschreven in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} W^0 \\ W^1 \\ W^2 \\ W^3 \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} \frac{dy^0}{dx^0} & \frac{dy^0}{dx^1} & \frac{dy^0}{dx^2} & \frac{dy^0}{dx^3} \\ \frac{dy^1}{dx^0} & \frac{dy^1}{dx^1} & \frac{dy^1}{dx^2} & \frac{dy^1}{dx^3} \\ \frac{dy^2}{dx^0} & \frac{dy^2}{dx^1} & \frac{dy^2}{dx^2} & \frac{dy^2}{dx^3} \\ \frac{dy^3}{dx^0} & \frac{dy^3}{dx^1} & \frac{dy^3}{dx^2} & \frac{dy^3}{dx^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 \\ B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix}_x$$

Samengevat

- **Covariante vectoren** (zoals duale vectoren) transformeren *mee* met het coördinatenstelsel:

$$A_n^{(y)} = \frac{dx^m}{dy^n} B_m^{(x)}$$

- **Contravariante vectoren** (zoals positie- of snelheidsvectoren) transformeren *tegenovergesteld*:

$$W_{(y)}^n = \frac{dy^n}{dx^m} B_{(x)}^m$$

Opmerking

De Einstein-notatie maakt gebruik van **herhaalde indices** (zogenaamde *dummy indices*), die impliciet sommeren over de waarden 0 tot 3. In dit hoofdstuk zijn de vergelijkingen expliciet uitgeschreven om de betekenis van deze notatie beter te illustreren.

2.4 Covariante en Contravariante Transformaties van Tensoren

In de algemene relativiteitstheorie, en breder in de tensoranalyse, spelen **covariante**, **contravariante** en **gemengde tensoren** een centrale rol. De manier waarop deze tensoren transformeren tussen coördinatenstelsels is cruciaal om de algemene relativiteit coördinaten-onafhankelijk te formuleren. In dit hoofdstuk bespreken we de transformatie-eigenschappen van deze tensoren.

De methode is in essentie een uitbreiding van de transformatieregels voor vectoren, zoals besproken in het vorige hoofdstuk.

2.4.1 Covariante Tensoren

Een **covariante tensor** is een tensor met één of meer **onderindices**, bijvoorbeeld T_{mn} . Deze kunnen worden opgebouwd als het product van twee covariante vectoren, bijvoorbeeld A_m en B_n

De transformatie van een covariante tensor van een coördinatenstelsel x naar een nieuw stelsel y verloopt als volgt:

$$T_{mn}^{(y)} = A_m^{(y)} B_n^{(y)} = \frac{dx^r}{dy^m} A_r^{(x)} \frac{dx^s}{dy^n} B_s^{(x)} = \frac{dx^r}{dy^m} \frac{dx^s}{dy^n} A_r^{(x)} B_s^{(x)} = \frac{dx^r}{dy^m} \frac{dx^s}{dy^n} T_{rs}^{(x)}$$

Het resultaat van de transformatie van T_{rs} naar T_{mn} wordt dan gegeven door:

$$T_{mn}^{(y)} = \frac{dx^r}{dy^m} \frac{dx^s}{dy^n} T_{rs}^{(x)}$$

Hierbij geldt:

- $T_{mn}^{(y)}$ de covariante tensor in het nieuwe coördinatenstelsel y ,
- De factoren $\frac{dx^r}{dy^m}$ en $\frac{dx^s}{dy^n}$ zijn de Jacobiaancomponenten van de transformatie van y naar x ,
- $T_{rs}^{(x)}$ is de oorspronkelijke covariante tensor in het oude stelsel.

2.4.2 Contravariante Tensoren

Een **contravariante tensor** heeft één of meer **bovenindices**, bijvoorbeeld T^{mn} . Ook deze kunnen worden opgebouwd als het product van twee contravariante vectoren.

De transformatie van zo'n tensor verloopt precies omgekeerd aan de covariante:

$$T_{(y)}^{mn} = A_{(y)}^m B_{(y)}^n = \frac{dy^m}{dx^r} A_{(x)}^r \frac{dy^n}{dx^s} B_{(x)}^s = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dy^n}{dx^s} A_{(x)}^r B_{(x)}^s = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dy^n}{dx^s} T_{(x)}^{rs}$$

Het resultaat van de transformatie van T^{rs} naar T^{mn} wordt dan gegeven door:

$$T_{(y)}^{mn} = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dy^n}{dx^s} T_{(x)}^{rs}$$

Hierbij geldt:

- $T_{(y)}^{mn}$: contravariante tensor in het nieuwe coördinatenstelsel y ,
- $\frac{dy^m}{dx^r}$ en $\frac{dy^n}{dx^s}$: Jacobiaan van de transformatie van x naar y ,
- $T_{(x)}^{rs}$: oorspronkelijke tensor in het stelsel x .

2.4.3 Gemengde Tensoren

Een **gemengde tensor** bevat zowel boven- als onderindices, zoals T_n^m . Deze ontstaat bijvoorbeeld uit het product van een contravariante vector A^m en een covariante vector B_n . De transformatieformule luidt:

$$T_n^m(y) = A_{(y)}^m B_n^{(y)} = \frac{dy^m}{dx^r} A_{(x)}^r \frac{dx^s}{dy^n} B_s^{(x)} = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dx^s}{dy^n} A_{(x)}^r B_s^{(x)} = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dx^s}{dy^n} T_s^r(x)$$

Dus, de **transformatie** van een **gemengde tensor** is:

$$T_n^m(y) = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dx^s}{dy^n} T_s^r(x)$$

Hierbij geldt:

- $T_n^m(y)$: de getransformeerde gemengde tensor,
- $\frac{dy^m}{dx^r}$ en $\frac{dx^s}{dy^n}$ zijn de Jacobiaan van de transformatie,
- $T_s^r(x)$: de oorspronkelijke gemengde tensor in stelsel x .

2.4.4 Opmerkingen en samenvatting

- Een **tensor van rang 0** is een **scalaire grootheid** (zoals temperatuur of massa).
- Een **vector** is een **tensor van rang 1**:
 - V^m : contravariante vector,
 - V_m : covariante vector.
- Een **tensor van rang 2** kan zijn:
 - volledig **covariant**: T_{mn} ,
 - volledig **contravariant**: T^{mn} ,
 - **gemengd**: T_n^m , enz.

De transformatie-eigenschappen van tensoren zorgen ervoor dat de fundamentele vergelijkingen van de natuurkunde, zoals de veldvergelijkingen in de algemene relativiteitstheorie, **invariant blijven onder coördinatentransformaties**. Dit is een essentiële eigenschap van elke covariante theorie.

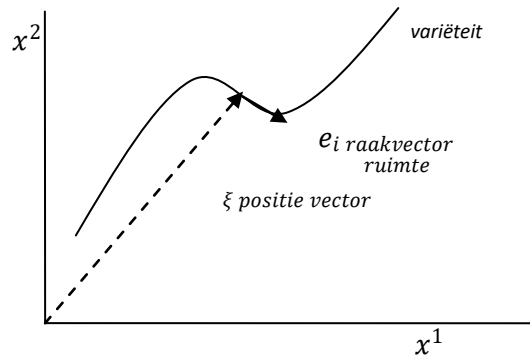
2.5 Afleiding van het Christoffel Symbool en de Covariante Afgeleide

Om zwaartekracht in termen van **ruimte-tijd-geometrie** te beschrijven, had Einstein een manier nodig om de **kromming** van ruimte-tijd wiskundig vast te leggen. Deze kromming wordt niet beschreven via klassieke krachten, maar via de structuur van de ruimte-tijd zelf.

De functie die deze geometrische verandering op elk punt van de ruimte-tijd beschrijft, is het **Christoffel-symbool**. Dit symbool speelt ook een centrale rol in het definiëren van de **covariante afgeleide**, die essentieel is in een gekromde ruimte.

In dit hoofdstuk leiden we het Christoffel-symbool af en lichten we zijn betekenis toe.

2.5.1 Basisdefinitie van het Christoffel-symbool



Beschouw een coördinatenstelsel x^i met een bijbehorende **positievector** $\vec{\xi}(x^i)$ (uitgesproken als *kxi*), die een variëteit (ruimte) beschrijft. We definiëren de basisvectoren in de raakruimte als de partiële afgeleiden van $\vec{\xi}$:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial x^i}$$

De afgeleide van deze basisvector ten opzichte van een andere coördinaat x^j geeft ons de **verandering van de basisrichting** in de ruimte:

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial x^i \partial x^j}$$

Deze tweede afgeleide kan worden uitgedrukt als een lineaire combinatie van de basisvectoren zelf:

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k \quad (1)$$

Hierin is Γ_{ij}^k het **Christoffel-symbool van de tweede soort**. Dit symbool bevat informatie over hoe de basisvectoren veranderen en dus over de **kromming van de ruimte**. Als deze afgeleide nul is, dan verandert de richting van de basisvector niet en is de ruimte vlak.

Vectoriële interpretatie

De basisvectoren $\vec{e}_i$ behoren tot de **raakruimte** aan een punt van de variëteit. De verandering van deze vectoren via (1) vertelt ons iets over de kromming: als $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} \neq 0$, dan is de ruimte **gekromd**.

Uitgeschreven heeft de vergelijking (1) de vorm:

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k = \Gamma_{ij}^0 \vec{e}_0 + \Gamma_{ij}^1 \vec{e}_1 + \Gamma_{ij}^2 \vec{e}_2 + \Gamma_{ij}^3 \vec{e}_3$$

(Vanaf hier laten we het vectorteken weg voor eenvoud.)

Afleiding van het Christoffel-symbool

Gebruikmakend van de **dualiteit van basisvectoren**, nemen we het inwendig product met e^k , de duale basisvector:

$$e^k e_k = 1 \tag{2}$$

Door beide zijden van (1) te vermenigvuldigen met e^k verkrijgen we:

$$\Gamma_{ij}^k = e^k \left(\frac{\partial e_i}{\partial x^j} \right) \tag{3}$$

Hieruit volgt een directe definitie van het Christoffel-symbool.

Symmetrie van de onderste indices

Omdat in een gladde variëteit de volgorde van differentiëren niet uitmaakt ($\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$), geldt:

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \frac{\partial e_j}{\partial x^i} \Rightarrow e^k \frac{\partial e_i}{\partial x^j} = e^k \frac{\partial e_j}{\partial x^i} \Rightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \tag{4}$$

De onderste twee indices van het Christoffel-symbool zijn dus **symmetrisch**.

Via de coördinatentransformatie

Beschouw:

$$e_k = \frac{\partial \xi}{\partial x^k} \Rightarrow e^k = \frac{1}{e_k} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi} \quad (5)$$

Substitutie in vergelijking (1) geeft:

$$e^k \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^i \partial x^j} \right) = \Gamma_{ij}^k \quad (6)$$

Of, omgekeerd geschreven:

$$\Gamma_{ij}^k = \left(\frac{\partial x^k}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^i \partial x^j} \right)$$

Deze uitdrukking laat zien dat het Christoffel-symbool een afgeleide is van de coördinaten en dus direct gerelateerd is aan de **geometrie** van de ruimte-tijd.

Koppeling aan de metrische tensor

We introduceren nu de **metrische tensor** (g_{ik}), gedefinieerd als het inwendig product van de basisvectoren:

$$g_{ik} = e_i \cdot e_k = (g^{ik})^{-1} \quad (7)$$

Met behulp van de inverse metriek g^{ik} kunnen we basisvectoren omzetten:

$$\begin{aligned} e_i \cdot \frac{1}{e^k} &= (g^{ik})^{-1} \\ e^k &= g^{ik} e_i \end{aligned} \quad (8)$$

Samenvatting

- Het **Christoffel-symbool** Γ_{ij}^k beschrijft de verandering van basisvectoren in gekromde ruimte.
- Deze symbolen worden gebruikt in het definiëren van de **covariante afgeleide** (volgt in het volgende hoofdstuk).
- De **symmetrie** $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ volgt uit de commutativiteit van partiële afgeleiden.
- Het symbool is uitdrukbaar in termen van de tweede afgeleide van de coördinaten of, via de metrische tensor, in termen van de geometrie van de ruimte-tijd.

2.5.2 Covariante Afgeleide

De **covariante afgeleide** is een uitbreiding van het concept van de gewone afgeleide in vlakke (Euclidische) ruimte. In de context van de algemene relativiteitstheorie moet deze afgeleide worden aangepast zodat ze geldig is in **gekromde ruimte-tijd**.

Einstein stelde als eis dat zijn theorie **covariant** moest zijn, wat betekent dat fysische wetten dezelfde vorm behouden in elk coördinatenstelsel. In het bijzonder moet gelden: als de afgeleide van een tensor nul is in één stelsel, dan moet dat ook zo zijn in elk ander coördinatenstelsel.

Om dit te garanderen, definiëren we de **covariante afgeleide** ∇ , die de gewone afgeleide corrigeert met extra termen. Deze afgeleide voldoet aan de eis:

$$\nabla g_{mn} = 0$$

Deze voorwaarde definieert de unieke torsievrije verbinding ∇ , die ook bekend staat als de **Levi-Civita-verbinding**.

Metriek en afgeleiden

We beginnen met de metrische tensor (7):

$$g_{mn} = e_m \cdot e_n \quad (9)$$

Neem de gewone afgeleide naar x^s :

$$\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} = \frac{\partial(e_m \cdot e_n)}{\partial x^s} = e_m \frac{\partial e_n}{\partial x^s} + e_n \frac{\partial e_m}{\partial x^s} \quad (10)$$

Door de eerder afgeleide symmetrie (zie vergelijking 4), kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} &= e_m \frac{\partial e_n}{\partial x^s} + e_n \frac{\partial e_m}{\partial x^s} \\ \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} &= e_m \frac{\partial e_s}{\partial x^n} + e_n \frac{\partial e_s}{\partial x^m} \end{aligned} \quad (11)$$

Brengen we deze termen over naar de andere kant van de vergelijking, dan krijgen we:

$$\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} - e_m \frac{\partial e_s}{\partial x^n} - e_n \frac{\partial e_s}{\partial x^m} = 0 \quad (12)$$

Definitie van de covariante afgeleide

Deze relatie motiveert de definitie van de **covariante afgeleide van de metriek**:

$$\nabla_s g_{mn} = \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} - e_m \frac{\partial e_s}{\partial x^n} - e_n \frac{\partial e_s}{\partial x^m} = 0 \quad (13)$$

We drukken de raakruimte-afgeleiden nu uit in termen van **Christoffel-symbolen**. Uit het vorige hoofdstuk weten we:

$$\Gamma_{sn}^t = e^t \frac{\partial e_s}{\partial x^n} \quad \text{en} \quad g_{mt} = e_m \cdot e_t$$

Daarmee wordt vergelijking (13):

$$\nabla_s g_{mn} = \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} - e_m \frac{\partial e_s}{\partial x^n} e^t e_t - e_n \frac{\partial e_s}{\partial x^m} e^t e_t = 0 \quad (14)$$

Hier krijgen we de **covariante afgeleide** van de metrische tensor, uitgedrukt in de normale afgeleide, gecorrigeerd met twee termen die producten zijn van de metrische tensor en het bijbehorende Christoffel-symbool:

$$\nabla_s g_{mn} = \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} - g_{mt} \Gamma_{sn}^t - g_{nt} \Gamma_{sm}^t = 0 \quad (15)$$

Cyclische permutatie

Door dezelfde logica toe te passen op permutaties van de indices, krijgen we:

$$\nabla_m g_{ns} = \frac{\partial g_{ns}}{\partial x^m} - g_{nt} \Gamma_{ms}^t - g_{st} \Gamma_{mn}^t = 0 \quad (16)$$

$$\nabla_n g_{sm} = \frac{\partial g_{sm}}{\partial x^n} - g_{st} \Gamma_{nm}^t - g_{mt} \Gamma_{ns}^t = 0 \quad (17)$$

Nu voeren we de volgende operatie uit: (17) + (16) - (15), waarbij we rekening houden met de symmetrie zoals genoemd in vergelijking (4), dat $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, met als resultaat:

$$\frac{\partial g_{sm}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{ns}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} - 2g_{st} \Gamma_{nm}^t = 0 \quad (18)$$

$$g_{st} \Gamma_{nm}^t = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sm}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{ns}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} \right) \quad (19)$$

Christoffel-symbool via metriek

We isoleren Γ_{nm}^t door met de inverse metriek g^{st} te vermenigvuldigen:

$$\Gamma_{nm}^t = \frac{1}{2} g^{st} \left(\frac{\partial g_{sm}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{ns}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} \right) \quad (20)$$

Deze uitdrukking geeft de **Christoffel-symbolen** als functie van de **metrische tensor** en zijn eerste afgeleiden.

Opmerkingen

Covariantie van de metriek

We bevestigen dat de covariante afgeleide van de metriek inderdaad nul is (zie vergelijking 8):

$$\nabla A_\mu = g_{\mu\nu} \nabla A^\nu \quad (20a)$$

Gebruikmakend van:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

en de Leibniz-regel (ketting regel):

$$\nabla A_\mu = \nabla(g_{\mu\nu} A^\nu) = g_{\mu\nu} \nabla A^\nu + A^\nu \nabla g_{\mu\nu} \quad (20b)$$

Zowel (20a) als (20b) moeten hetzelfde resultaat geven, dus:

$$g_{\mu\nu} \nabla A^\nu = g_{\mu\nu} \nabla A^\nu + A^\nu \nabla g_{\mu\nu}$$

Dan moet:

$$A^\nu \nabla g_{\mu\nu} = 0$$

Aangezien

$$A^\nu \neq 0 \text{ dan is } \nabla g_{\mu\nu} = 0$$

Hieruit volgt dat de **covariante afgeleide van de metriek nul is**, wat een fundamentele eigenschap is van de Levi-Civita-verbinding.

Transformatieregel van vectorcomponenten

Beschouw een vector:

$$\vec{V} = V^m \vec{e}_m$$

De component in de richting van de n -as is:

$$\begin{aligned} V_n &= \vec{V} \cdot \vec{e}_n \\ V_n &= V^m (\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n) \end{aligned}$$

Zoals we weten:

$$g_{mn} = \vec{e}_m \cdot \vec{e}_n = g_{nm}$$

Dus:

$$V_n = g_{nm} V^m \quad (20c)$$

Omgekeerd, via de inverse metriek:

$$g_{nm} = \frac{1}{g^{mn}}$$

$$V^m = g^{mn}V_n \quad (20d)$$

2.5.2.1 Covariante Afgeleide voor een Contravariante Vector

We willen nu de **covariante afgeleide** berekenen van een **contravariant vectorveld** V^m . In vlakke ruimte zou dit eenvoudigweg de gewone partiële afgeleide zijn. In een gekromde ruimte-tijd moeten we echter rekening houden met het feit dat de basisvectoren zelf ook kunnen variëren van punt tot punt.

Uitgangspunt: vector in componentvorm

We beschouwen de vector $\vec{V}$ als een lineaire combinatie van basisvectoren $\vec{e}_m$:

$$\vec{V} = V^m \vec{e}_m \quad (21)$$

De afgeleide van $\vec{V}$ naar een coördinaat x^l is:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^l} = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} \vec{e}_m + V^m \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^l} \quad (22)$$

Koppeling met het Christoffel-symbool

Uit eerder werk (vergelijking 1) weten we dat de afgeleide van de basisvector wordt uitgedrukt via het **Christoffel-symbool**:

$$\frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^l} = \Gamma_{ml}^k \vec{e}_k \quad (23)$$

Substitutie in vergelijking (22) levert:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^l} = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} \vec{e}_m + V^m \Gamma_{ml}^k \vec{e}_k \quad (24)$$

De som over de indices m en k maakt gebruik van de **Einstein-notatie**. We mogen de **dummy-indices** hernoemen (zie opmerking onderaan), en herschrijven de tweede term door $m \rightarrow \gamma$ en $k \rightarrow m$:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^l} = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} \vec{e}_m + V^\gamma \Gamma_{\gamma l}^m \vec{e}_m$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^l} = \left(\frac{\partial V^m}{\partial x^l} + V^\gamma \Gamma_{\gamma l}^m \right) \vec{e}_m \quad (25)$$

Definitie van de covariante afgeleide

Hieruit volgt direct de definitie van de **covariante afgeleide** van de contravariante vector V^m ;

$$\nabla_l V^m = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} + \Gamma_{\gamma l}^m V^\gamma \quad (26)$$

De extra term (met het Christoffel-symbool) corrigeert voor het feit dat de basisvectoren in een gekromde ruimte zelf veranderen. De covariante afgeleide $\nabla_l V^m$ is daardoor **tensorieel van aard** en transformeert correct onder coördinatenwisselingen.

Opmerking: dummy-indices

In de Einstein-notatie mag men vrij kiezen hoe men de **dummy-index** benoemt, zolang deze index in het product wordt gesommeerd. Bijvoorbeeld:

$$V^\mu A_\mu = V^0 A_0 + V^1 A_1 + V^2 A_2 + V^3 A_3$$

Of we de index nu μ, γ of k noemen, maakt niets uit voor het eindresultaat. De index fungeert slechts als **plaatsvervanger** voor de sommatie over de dimensies.

Samengevat

- De covariante afgeleide van een contravariante vector V^m is:

$$\nabla_l V^m = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} + \Gamma_{\gamma l}^m V^\gamma$$

- Deze formule corrigeert de gewone afgeleide met een term die de kromming van de ruimte-tijd weerspiegelt via het Christoffel-symbool.
- Het resultaat is een **tensor** van dezelfde rang als de originele vector.

2.5.2.2 Covariante Afgeleide voor een Covariante Vector

We bekijken nu hoe de **covariante afgeleide** werkt voor een **covariante vector** B_μ . We maken hierbij gebruik van het **scalaire product** van een contravariante vector A^μ en een covariante vector B_μ , en passen vervolgens de afgeleideregels toe.

Beginpunt: productregel op scalaire grootheid

Neem het scalaire product $A^\mu B_\mu$. De covariante afgeleide van dit product is

$$\nabla_\alpha (A^\mu B_\mu) = (\nabla_\alpha A^\mu) B_\mu + A^\mu (\nabla_\alpha B_\mu) \quad (27)$$

Substitueer de uitdrukking voor $\nabla_\alpha A^\mu$ uit eerder werk:

$$\nabla_\alpha A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\nu$$

Daarmee wordt vergelijking (27):

$$\nabla_\alpha (A^\mu B_\mu) = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\nu \right) B_\mu + A^\mu (\nabla_\alpha B_\mu) \quad (28)$$

Eigenschap van scalairs

Omdat het scalaire product $A^\mu B_\mu$ een **scalar** is, is de covariante afgeleide gelijk aan de gewone afgeleide:

$$\nabla_\alpha (A^\mu B_\mu) = \frac{\partial (A^\mu B_\mu)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} B_\mu + A^\mu \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\alpha} \quad (29)$$

Vergelijking van beide uitdrukkingen

Door vergelijking van de rechterkanten van (28) en (29):

$$\cancel{\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha}} B_\mu + A^\mu \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\alpha} = \left(\cancel{\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha}} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\nu \right) B_\mu + A^\mu (\nabla_\alpha B_\mu) \quad (30)$$

Nu herschrijven we de indices in de tweede termen aan beide kanten om de vergelijking op te schonen.

Hernoem $\mu \rightarrow \sigma$ en $\nu \rightarrow \mu$ in de laatste term aan de rechterkant. Dan blijft over:

$$A^\mu \left[-\frac{\partial B_\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma B_\sigma + (\nabla_\alpha B_\mu) \right] = 0 \quad (31)$$

Omdat deze vergelijking voor elk A^μ moet gelden, volgt:

$$\nabla_\alpha B_\mu = \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma B_\sigma \quad (32)$$

Definitie

Dit is de **covariante afgeleide van een covariante vector** B_μ . De formule is analoog aan die van contravariante vectoren, maar het Christoffel-symbool komt nu met een **minteken** en met verwisselde indexpositie:

Voor V^m :

$$\nabla_l V^m = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} + \Gamma_{\gamma l}^m V^\gamma$$

- Voor V^m : $\nabla_l V^m = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} + \Gamma_{\gamma l}^m V^\gamma$
- Voor B_μ : $\nabla_\alpha B_\mu = \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma B_\sigma$

Samengevat

- De covariante afgeleide van een covariante vector B_μ is:

$$\nabla_\alpha B_\mu = \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma B_\sigma$$

- De tweede term corrigeert voor de verandering van de basisvectoren in een gekromde ruimte.
- Deze definitie zorgt ervoor dat de afgeleide transformeert als een tensor.

2.5.3 Relatie met Tensor

In dit hoofdstuk onderzoeken we hoe een **tensor**, opgebouwd uit de afgeleide van een covariante vector V_m , zich gedraagt onder een coördinatentransformatie. We laten zien dat de **gewone afgeleide** van een vector géén tensor oplevert, en dat de **covariante afgeleide** noodzakelijk is om een tensoriële relatie te behouden.

Transformatie van een afgeleide

Beschouw de volgende definitie van een tensor van rang 2 in het x-coördinatenstelsel:

$$T_{mn}(x) = \frac{\partial V_m(x)}{\partial x^n} \quad (33)$$

In een ander coördinatenstelsel y , schrijven we:

$$T_{mn}(y) = \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} \quad (34)$$

We onderzoeken nu of $T_{mn}(x)$ zich daadwerkelijk als een tensor gedraagt, d.w.z. of vergelijking (34) overeenkomt met de getransformeerde vorm van (33).

Verwachte tensortransformatie

De gebruikelijke **transformatieformule voor een covariante tensor** luidt:

$$T_{mn}(y) = \frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial x^s}{\partial y^n} T_{rs}(x) \quad (35)$$

Substitueer nu $T_{rs}(x) = \frac{\partial V_r(x)}{\partial x^s}$:

$$T_{mn}(y) = \frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial x^s}{\partial y^n} \frac{\partial V_r(x)}{\partial x^s} = \frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n} \quad (36)$$

Merk op dat:

$$\frac{\partial V_r(x)}{\partial x^s} = \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n} \cdot \frac{\partial y^n}{\partial x^s} \quad (\text{via de kettingregel})$$

Maar de vergelijking wordt eenvoudiger als we direct beschouwen:

$$T_{mn}(y) = \boxed{\frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n}} \quad (37)$$

We willen nu aantonen dat:

$$\frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} \neq T_{mn}(y) \quad (?)$$

Berekening van $\frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n}$

Gebruik de transformatie van vectorcomponenten:

$$V_m(y) = \frac{\partial x^r}{\partial y^m} V_r(x)$$

Dan is:

$$\frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} = \frac{\partial}{\partial y^n} \left(\frac{\partial x^r}{\partial y^m} V_r(x) \right)$$

Pas de productregel toe:

$$\frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} = \boxed{\frac{\partial x^r}{\partial y^m} \cdot \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n}} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial y^n \partial y^m} \cdot V_r(x) \quad (38)$$

Gebruik vervolgens de inverse transformatie:

$$V_r(x) = \frac{\partial y^a}{\partial x^r} V_a(y) \quad (39)$$

Ingevuld in (38):

$$\frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} = \boxed{\frac{\partial x^r}{\partial y^m} \cdot \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n}} + \frac{\partial y^a}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial^2 x^r}{\partial y^n \partial y^m} \cdot V_a(y) \quad (40)$$

Koppeling met Christoffel-symbolen

Herinner dat (zie eerdere afleiding van Christoffel-symbool):

$$\Gamma_{nm}^a = \frac{\partial y^a}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial^2 x^r}{\partial y^n \partial y^m} \quad (\text{uit 6})$$

Substitutie in (40) geeft:

$$\frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} = \boxed{\frac{\partial x^r}{\partial y^m} \cdot \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n}} + \Gamma_{nm}^a V_a(y)$$

Herordenen geeft:

$$\boxed{\frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n}} = T_{mn}(y) = \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} - \Gamma_{nm}^a V_a(y) \quad (41)$$

Dus:

$$T_{mn}(y) \neq \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n}$$

Covariante afgeleide van V_m

Volgens bovenstaande resultaat:

$$T_{mn}(y) = \frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n} = \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} - \Gamma_{nm}^a V_a(y)$$

En dat is exact de **covariante afgeleide van de covariante vector V_m** :

$$T_{mn}(y) = \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} - \Gamma_{nm}^a V_a(y) = \nabla_n V_m(y)$$

$$T_{mn}(y) = \nabla_n V_m(y) \quad (42)$$

Conclusie

- De gewone afgeleide $\frac{\partial V_m(x)}{\partial x^n}$ is **géén tensor**.
- Pas na correctie met het **Christoffel-symbool** ontstaat een grootheid die zich onder coördinatentransformaties gedraagt als tensor.
- De correcte tensoriële versie is de **covariante afgeleide**:

$$T_{mn} = \nabla_n V_m$$

2.5.3.1 Covariante Differentiatie voor een Covariante Tensor

We breiden nu het begrip **covariante afgeleide** uit naar een **covariante tensor van rang 2**. De afleiding volgt direct uit de productregel voor tensoren en de eerder vastgestelde regels voor de covariante afgeleiden van vectoren.

Uitgangspunt

Beschouw een tensor $T_{\mu\nu}$, opgebouwd als het product van twee **covariante vectoren** A_μ en B_ν :

$$T_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$$

We willen nu de **covariante afgeleide** nemen van deze tensor met betrekking tot x^α :

$$\nabla_\alpha T_{\mu\nu} = \nabla_\alpha (A_\mu B_\nu)$$

Volgens de productregel:

$$\nabla_\alpha T_{\mu\nu} = (\nabla_\alpha A_\mu) B_\nu + A_\mu (\nabla_\alpha B_\nu) \quad (a)$$

Gebruik nu de definitie van de covariante afgeleide van een covariante vector (zie hoofdstuk 2.5.2.2):

$$\nabla_{\alpha} A_{\mu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} A_{\beta}$$

$$\nabla_{\alpha} B_{\nu} = \frac{\partial B_{\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma} B_{\gamma}$$

Substitueer deze in (a):

$$\nabla_{\alpha} T_{\mu\nu} = B_{\nu} \left\{ \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - A_{\beta} \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} \right\} + A_{\mu} \left\{ \frac{\partial B_{\nu}}{\partial x^{\alpha}} - B_{\gamma} \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma} \right\}$$

Werk dit verder uit:

$$\nabla_{\alpha} T_{\mu\nu} = B_{\nu} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - A_{\beta} B_{\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} + A_{\mu} \frac{\partial B_{\nu}}{\partial x^{\alpha}} - A_{\mu} B_{\gamma} \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma}$$

$$\nabla_{\alpha} T_{\mu\nu} = B_{\nu} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + A_{\mu} \frac{\partial B_{\nu}}{\partial x^{\alpha}} - A_{\beta} B_{\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} - A_{\mu} B_{\gamma} \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma}$$

$$\nabla_{\alpha} T_{\mu\nu} = \frac{\partial (A_{\mu} B_{\nu})}{\partial x^{\alpha}} - A_{\beta} B_{\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} - A_{\mu} B_{\gamma} \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma}$$

Definitieve formule

Omdat $T_{\mu\nu} = A_{\mu} B_{\nu}$, krijgen we uiteindelijk:

$$\nabla_{\alpha} T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - T_{\beta\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} - T_{\mu\gamma} \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma} \quad (43)$$

Samenvatting

De **covariante afgeleide van een covariante tensor** $T_{\mu\nu}$ bestaat uit:

- de gewone afgeleide $\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}$,
- twee **correctietermen** met Christoffel-symbolen, één voor elke index van de tensor.

Dit garandeert dat $\nabla_{\alpha} T_{\mu\nu}$ zich als een tensor gedraagt onder coördinatentransformaties.

2.5.3.2 Covariante Differentiatie voor een Contravariante Tensor

We breiden nu het concept van **covariante differentiatie** verder uit naar een **contravariante tensor van rang 2**. Deze tensor heeft twee bovenindices en transformeert anders dan een covariante tensor. We volgen opnieuw de productregel en passen de bekende covariante afgeleideformules toe.

Uitgangspunt

Beschouw een contravariante tensor $T^{\mu\nu}$ als het product van twee contravariante vectoren:

$$T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$$

De covariante afgeleide van $T^{\mu\nu}$ met betrekking tot x^α is dan:

Nu covariant differentiëren van deze tensor:

$$\nabla_\alpha T^{\mu\nu} = B^\nu \nabla_\alpha A^\mu + A^\mu \nabla_\alpha B^\nu \quad (a)$$

Gebruik nu de formule voor de covariante afgeleide van een contravariante vector (zie hoofdstuk 2.5.2.1):

$$\nabla_\alpha A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu A^\beta$$

$$\nabla_\alpha B^\nu = \frac{\partial B^\nu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu B^\gamma$$

Substitutie in (a) geeft:

$$\nabla_\alpha T^{\mu\nu} = B^\nu \left\{ \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \right\} + A^\mu \left\{ \frac{\partial B^\nu}{\partial x^\alpha} + B^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu \right\}$$

$$\nabla_\alpha T^{\mu\nu} = B^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\beta B^\nu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + A^\mu \frac{\partial B^\nu}{\partial x^\alpha} + A^\mu B^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu$$

$$\nabla_\alpha T^{\mu\nu} = B^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\mu \frac{\partial B^\nu}{\partial x^\alpha} + A^\beta B^\nu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + A^\mu B^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu$$

Herschrijf dit als:

$$\nabla_\alpha T^{\mu\nu} = \frac{\partial (A^\mu B^\nu)}{\partial x^\alpha} + A^\beta B^\nu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + A^\mu B^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu$$

Definitieve formule

Omdat $T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$, krijgen we:

$$\nabla_\alpha T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + T^{\beta\nu} \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + T^{\mu\gamma} \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu \quad (44)$$

Samengevat

De **covariante afgeleide van een contravariante tensor $T^{\mu\nu}$** bestaat uit:

- de gewone afgeleide $\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}$,
- twee **correctietermen** met Christoffel-symbolen, één voor elke bovenindex.

De volgorde van indices in het Christoffel-symbool is belangrijk: de **eerste index** (boven) geeft aan welke tensorindex wordt aangepast, de twee onderste zijn afkomstig uit de afgeleide.

2.5.3.3 Covariante Differentiatie voor een Gemengde Tensor

We bekijken nu hoe de **covariante afgeleide** wordt toegepast op een **gemengde tensor** — een tensor die zowel een **contravariante** als een **covariante** index heeft.

Uitgangspunt

Beschouw de gemengde tensor T_ν^μ , gedefinieerd als het product van een contravariante vector A^μ en een covariante vector B_ν :

$$T_\nu^\mu = A^\mu B_\nu$$

De covariante afgeleide van T_ν^μ ten opzichte van x^α is:

$$\nabla_\alpha T_\nu^\mu = B_\nu \nabla_\alpha A^\mu + A^\mu \nabla_\alpha B_\nu \quad (a)$$

Gebruik van covariante afgeleiden

Vervang de afgeleiden door hun bekende expressies:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha A^\mu &= \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu A^\beta \\ \nabla_\alpha B_\nu &= \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma B_\gamma \end{aligned}$$

Substitueer deze in (a):

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T_\nu^\mu &= B_\nu \left\{ \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \right\} + A^\mu \left\{ \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\alpha} - B_\gamma \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \right\} \\ \nabla_\alpha T_\nu^\mu &= B_\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\beta B_\nu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + A^\mu \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\alpha} - A^\mu B_\gamma \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \\ \nabla_\alpha T_\nu^\mu &= B_\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\mu \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\alpha} + A^\beta B_\nu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu - A^\mu B_\gamma \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \end{aligned}$$

Herschrijf dit tot:

$$\nabla_\alpha T_\nu^\mu = \frac{\partial (A^\mu B_\nu)}{\partial x^\alpha} + A^\beta B_\nu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu - A^\mu B_\gamma \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma$$

Definitieve formule

Omdat $T_\nu^\mu = A^\mu B_\nu$, volgt:

$$\nabla_\alpha T_\nu^\mu = \frac{\partial T_\nu^\mu}{\partial x^\alpha} + T_\nu^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu - T_\gamma^\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \quad (45)$$

Samenvatting

De **covariante afgeleide van een gemengde tensor** T^μ_ν bevat:

- de gewone afgeleide $\frac{\partial T^\mu_\nu}{\partial x^\alpha}$
- een **positieve correctieterm** voor de contravariante index (μ),
- een **negatieve correctieterm** voor de covariante index (ν).

Deze structuur zorgt ervoor dat $\nabla_\alpha T^\mu_\nu$ zich als een tensor gedraagt onder coördinatentransformaties.

2.6 Geodetische Vergelijking en Christoffel-symbolen

Zoals eerder besproken, trachtte Einstein de **geometrie van ruimte-tijd** zó te formuleren dat een vrij vallend object geen zwaartekracht ervaart, maar in plaats daarvan een “rechte lijn” volgt in een gekromde ruimte-tijd. Zo'n pad wordt een **geodeet** genoemd.

In deze context is de **versnelling van de vierpositie** van het object gelijk aan nul. In lokale vrije val volgt het object dus:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \text{ met } ds = c d\tau$$

Hierbij is τ de **eigentijd** (proper time), gemeten door een waarnemer die zich in een vrij vallend coördinatenstelsel bevindt. De oorsprong van dit stelsel "geeft zich over" aan de zwaartekracht en volgt exact het pad van het vrij vallende object.

Afleiding via coördinatentransformatie

Stel dat ξ^α de coördinaten zijn in het lokale (vrij vallende) stelsel, terwijl x^μ de coördinaten zijn in een algemeen gekromd coördinatenstelsel. Dan geldt:

$$\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} x^\mu$$

De eerste afgeleide wordt:

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

De tweede afgeleide:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu} \right) \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \cdot \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu} \right) \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \cdot \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d^2 \xi^\alpha}{dx^\mu dx^\nu} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \cdot \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

Omdat $\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$ voor een vrij vallend object, volgt:

$$0 = \frac{d^2 \xi^\alpha}{dx^\mu dx^\nu} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \cdot \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

Vermenigvuldig dit met:

Vermenigvuldig met $\frac{dx^\beta}{d\xi^\alpha}$

Om terug te keren naar de x-coördinaten, vermenigvuldigen we beide zijden met $\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}$:

$$0 = \frac{dx^\beta}{d\xi^\alpha} \cdot \frac{d^2 \xi^\alpha}{dx^\mu dx^\nu} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \cdot \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \cdot \frac{dx^\beta}{d\xi^\alpha}$$

Hier geldt:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\beta \quad (\text{de Kronecker delta})$$

Dus:

$$0 = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} + \delta_\mu^\beta \cdot \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

De **Kronecker delta** is gedefinieerd als 1 alleen wanneer $\beta = \mu$, en 0 als $\beta \neq \mu$.

$\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\beta = 0$, omdat x^β en x^μ loodrecht op elkaar staan in het geval $\beta \neq \mu$. Vanwege de Einstein notatie bestaat de meest rechtse term uit vier elementen, hierbij is dus $\delta_\mu^\beta = 1$ bij $\mu = \beta$, terwijl de overige drie termen nul zijn. Dit betekent dat we de μ index, in de laatste term, kunnen vervangen door β .

Dus:

$$0 = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}$$

Herken hierin het **Christoffel-symbool**:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Daarmee krijgen we de **geodetische vergelijking**:

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} = 0 \quad (1)$$

Interpretatie

De tweede afgeleide $\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}$ wordt dus gecompenseerd door de door de **Christoffel-term**. Wanneer er **geen zwaartekracht** is (dus vlakke ruimte-tijd), zijn alle $\Gamma_{\mu\nu}^\beta = 0$, en volgt het object een rechte lijn:

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = 0$$

De geodetische vergelijking beschrijft hoe een object beweegt onder invloed van ruimte-tijd kromming.

Samenvatting

De relatie tussen versnelling in het lokale vrije-valstelsel en in het algemene coördinatenstelsel is:

$$\frac{d^2 \xi^\beta}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}$$

Voor een object op een **geodetische baan** is de versnelling in het lokale stelsel nul:

$$0 = \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}$$

Of, anders geschreven:

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}$$

Formule van het Christoffel-symbool

Waarbij het Christoffel-symbool de relatie bevat tussen het bewegende stelsel ξ^α en het “rust” stelsel x^β .

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Opmerkingen

Opmerking 1: Affiene parameter

Voor massalose deeltjes zoals fotonen is $\tau = 0$, waardoor gebruik van de eigentijd niet geschikt is. Daarom gebruiken we een **affiene parameter** λ , zodat de geodetische vergelijking wordt:

$$0 = \frac{d^2 x^\beta}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda}$$

De parameter λ verdwijnt vaak in de uiteindelijke fysische uitdrukkingen, wat het gebruik vergemakkelijkt.

Opmerking 2: Lichtsnelheid c

In veel literatuur wordt $c=1$ gekozen voor eenvoud. In dit document behouden we echter **de lichtsnelheid c** expliciet in de formules. Dit maakt het makkelijker om de **dimensies** te controleren en vergroot de transparantie van de berekeningen.

2.7 Christoffel-Symbolen uitgedrukt in termen van de Metrische Tensor

Zoals eerder besproken, bevat de **metrische tensor** $g_{\mu\nu}$ alle informatie over de kromming en geometrie van de ruimte-tijd. In dit hoofdstuk zullen we aantonen hoe het **Christoffel-symbool** $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ kan worden uitgedrukt **uitsluitend in termen van de metrische tensor en haar afgeleiden**.

Voorwaarden en definities

We vertrekken vanuit de volgende standaardvormen:

- **Metrische tensor (vanuit de lokale vlakke ruimte):**

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

waarbij $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ de Minkowski-metrik is (zie ook hoofdstuk [4.5.1](#)).

- Christoffel-symbool (via transformatie):

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Omvorming via kettingregel

We beginnen met het herschrijven van de metrische tensor in een iets andere vorm $g_{\alpha\mu}$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad \text{vanwege symmetrie} \Rightarrow g_{\nu\mu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

Door de fictieve index α te vervangen door σ :

$$\sigma \Rightarrow g_{\nu\mu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

Door de index ν te vervangen door α :

$$\alpha \Rightarrow g_{\alpha\mu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \quad (2)$$

Nu herschrijven we het Christoffel-symbool door elk deel van de vergelijking te vermenigvuldigen met de partiële afgeleide van ξ^σ ten opzichte van x^β :

$$\left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta}\right) \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta}\right) = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta}\right) \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (3a)$$

Of:

$$\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta}\right) = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \xi^\lambda} = \delta_\lambda^\sigma \text{ of } \delta_\lambda^\sigma \{ = 1 \text{ als } \sigma = \lambda \text{ en } = 0 \text{ als } \sigma \neq \lambda \}$$

Dus samen met (3a) wordt dit:

$$\left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta}\right) \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \delta_\lambda^\sigma \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Als $\sigma = \lambda$ dan vervangen we σ door λ :

$$\left(\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\beta}\right) \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (3b)$$

Dus uit (2):

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\alpha}$$

Met (3b) kunnen we afleiden:

$$\frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \text{ en } \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

Nu herschrijven we de partiële afgeleide van $g_{\alpha\mu}$ met betrekking tot x^ν als volgt:

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

We weten van hierboven:

$$\text{metrische tensor: } g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

Dus:

$$\eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} = g_{\rho\alpha} \text{ en } \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} = g_{\mu\rho}$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + g_{\mu\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \quad (3c)$$

Voer cyclische permutaties uit:

$$\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} = g_{\rho\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\rho + g_{\nu\rho} \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \quad \mu \text{ en } \nu \text{ zijn verwisseld} \quad (3d)$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = g_{\rho\mu} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho + g_{\nu\rho} \Gamma_{\alpha\mu}^\rho \quad \alpha \text{ en } \mu \text{ zijn verwisseld} \quad (3e)$$

Neem nu (3c)+(3d)-(3e) uit:

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \textcolor{red}{g_{\mu\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho} + g_{\rho\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\rho + \textcolor{green}{g_{\nu\rho} \Gamma_{\mu\alpha}^\rho} - \textcolor{red}{g_{\rho\mu} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho} - \textcolor{green}{g_{\nu\rho} \Gamma_{\alpha\mu}^\rho}$$

Door symmetrie in de indices vereenvoudigt dit tot:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} &= 2g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \\ g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \end{aligned}$$

Isoleren van het Christoffel-symbool

Vermenigvuldig beide zijden met $g^{\rho\alpha}$ (de inverse metrische tensor):

De laatste stap bestaat erin beide zijden van de vergelijking te vermenigvuldigen met de inverse metrische tensor $g^{\rho\alpha}$ om zo het Christoffel symbool te vinden:

$$g^{\rho\alpha} g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

Verwisselen van ρ naar β :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

Gewoonlijk wordt de volgende conventie aangenomen voor het schrijven van partiële afgeleiden:

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \equiv g_{\alpha\mu,\nu}$$

Dus, het **Christoffel symbool** in compacte notatie:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha})$$

Samenvatting

De **Christoffel-symbolen** zijn volledig uitgedrukt in termen van de **metrische tensor** $g_{\mu\nu}$ en haar **eerste afgeleiden**:

$$\boxed{\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)}$$

Of in korte notatie:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha})$$

Opmerking

Deze vergelijking is fundamenteel in de algemene relativiteitstheorie. Ze toont aan dat **de geometrie van ruimte-tijd**, en daarmee de zwaartekracht, volledig wordt bepaald door de metriek. De Christoffel-symbolen beschrijven hoe vectoren veranderen onder paralleltransport en verschijnen in de geodetische vergelijking, de covariante afgeleide, en later in de Riemann- en Ricci-tensor.

2.8 Geodetische Vergelijking in de Newtoniaanse Limiet

De Newtoniaanse zwaartekracht beschrijft hoe materie een zwaartekrachtspotentiaal Φ genereert, en hoe, volgens de tweede wet van Newton, die potentiaal leidt tot een versnelling:

$$\vec{a} = -\nabla\Phi$$

Hier is Φ het zwaartekrachtspotentiaal, en ∇ is de Euclidische gradiëntoperator

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z \right)$$

Hier zijn $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ de eenheidsvectoren langs de respectievelijke assen. Deze beschrijving is accuraat bij lage snelheden, zwakke velden en in een statisch regime. We gaan nu laten zien dat de geodetische vergelijking van de algemene relativiteitstheorie in deze limiet reduceert tot de Newtoniaanse zwaartekrachtvergelijking.

Aannames voor de Newtoniaanse limiet:

- Het deeltje beweegt relatief langzaam ten opzichte van de lichtsnelheid.
- Het zwaartekrachtsveld is zwak.
- Het veld is statisch, dus het verandert niet met de tijd.

Startpunt: de geodetische vergelijking

De geodetische vergelijking beschrijft de wereldlijn van een deeltje dat alleen door zwaartekracht wordt beïnvloed. We zullen nu laten zien dat in de context van de Newtoniaanse limiet de geodetische vergelijking reduceert tot de zwaartekrachtvergelijking van Newton.

Uit het vorige hoofdstuk weten we dat de geodetische vergelijkingen, met de eigen tijd als parameter van de wereldlijn, als volgt zijn:

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} = 0$$

De tweede term omvat een som over μ en ν over alle indices, wat neerkomt op 16 termen. Omdat het deeltje zeer langzaam beweegt ten opzichte van de lichtsnelheid, domineert de tijdcomponent, d.w.z. de 0^e component van de vector van het deeltje, de andere ruimtelijke componenten. We komen dan tot de volgende benadering:

$$\text{met } \frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \quad (\text{aangezien we weten dat } c\partial t = \partial x^0)$$

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} = 0$$

De enige term die na benadering overblijft, is de tijdcomponent waarbij dus $\mu = \nu = 0$. Dit geeft:

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\beta \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 = 0$$

Voor de beschrijving van de vierdimensionale ruimte-tijd worden normaal gesproken Griekse letters gebruikt voor de indices, maar wanneer alleen de driedimensionale ruimte wordt beschouwd, is het gebruikelijk om Latijnse letters te gebruiken. Daarom wordt β vervangen door i ($i=x, y, z$), resulterend in:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^i \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (1)$$

Benadering van het Christoffel-symbool

Uit hoofdstuk [Christoffel-Symbolen uitgedrukt in termen van de Metrische Tensor \(2.7\)](#), blijkt dat het Christoffel-symbool kan worden berekend met betrekking tot de componenten van een gegeven metriek (waarbij $x^0 \equiv \tau$):

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{j0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} \right)$$

Omdat het veld statisch is, is, volgens de tweede aanname van de Newtoniaanse limiet, de tijdsafgeleide

$\frac{\partial g_{j0}}{\partial x^0} = 0$, zo dat het Christoffel symbool kan worden vereenvoudigd tot:

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} \quad (2)$$

Zwak-veldbenadering

Als het zwaartekrachtsveld zwak genoeg is, zal ruimte-tijd slechts licht vervormd worden ten opzichte van de zwaartekrachtvrije Minkowski-ruimte-tijd van de Speciale Relativiteitstheorie. Dan kan de ruimte-tijd metriek worden beschouwd als een kleine verstoring van de Minkowski-metriek $\eta_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{met } [h_{\mu\nu}] \ll 1$$

$$\frac{d g_{00}}{dx^j} = \frac{d(\eta_{00} + h_{00})}{dx^j}$$

$$\frac{d g_{00}}{dx^j} = \frac{d\eta_{00}}{dx^j} + \frac{d h_{00}}{dx^j} = 0 + \frac{d h_{00}}{dx^j} \text{ als } \eta_{00} = 1$$

Voor g_{00} geldt dan:

$$\frac{d g_{00}}{dx^j} = \frac{d h_{00}}{dx^j} \quad (3)$$

Dus uit (2) en (3) wordt vergelijking (1):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} &= -\Gamma_{00}^i \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 \\ \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} &= \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 \end{aligned}$$

Door $g^{ij} = \eta^{ij} - h^{ij}$ te definiëren, vinden we dat $g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\mu$, wat overeenkomt met de eerste orde van h_{ij} , bij het definiëren van een inverse metriek.

We verkrijgen dan:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{ij} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2$$

Maar aangezien η^{ij} niet nul is voor $j=i$, dan is $\eta^{ii} = -1$ (waarbij i verwijst naar de ruimtelijke componenten) geldt:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2$$

We zullen nu de afgeleide aan de linkerkant van τ naar t veranderen, dit gebeurt als volgt:

Eerst wordt in de bovenstaande vergelijking, i door 0 vervangen, waarbij dus $x^0 = t$:

$$c^2 \frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial t} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2$$

Aangezien het zwaartekrachtsveld constant is, geldt $\frac{\partial h_{00}}{\partial t} = 0$:

$$c^2 \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \quad (4)$$

Overschakelen naar coördinaattijd

Vervolgens bewerken we de partiële afgeleiden met betrekking tot tau (τ):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dt}{d\tau} \frac{dx^i}{dt} \right) \\ &= \frac{dt}{d\tau} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{dx^i}{dt} \right) + \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{dt}{d\tau} \left(\frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \frac{dx^i}{dt} \right) + \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} \right) \\
&= \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2} \right) + \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2} \right)
\end{aligned}$$

Zoals we hierboven in (4) hebben gezien, is $\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} &= \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\
\Rightarrow \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 &= -\frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2
\end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}$$

In het algemeen:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x}{dt^2} i + \frac{d^2 y}{dt^2} j + \frac{d^2 z}{dt^2} k &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c^2 h_{00}}{2} \right) i - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c^2 h_{00}}{2} \right) j - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{c^2 h_{00}}{2} \right) k \\
\frac{d^2 x}{dt^2} i + \frac{d^2 y}{dt^2} j + \frac{d^2 z}{dt^2} k &= -\left[\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right] \left(\frac{c^2 h_{00}}{2} \right) = -\nabla \left(\frac{c^2 h_{00}}{2} \right)
\end{aligned}$$

Vergelijking in Newton

In vectorvorm:

$$\boxed{\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\nabla \phi \quad \text{of} \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi}$$

$$\text{waarbij } \phi = \frac{c^2 h_{00}}{2} \text{ en dus } h_{00} = \frac{2\phi}{c^2}.$$

Dit is een andere manier om de Newtoniaanse gravitatiewet

$$\vec{a} = -\nabla \phi$$

te schrijven.

Metrische component in termen van potentiaal

Door de metrische g_{00} te schrijven als:

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad (5)$$

is de directe link te zien tussen de metrische tensor (component g_{00}) aan de linkerkant en het gravitationele potentiaal ϕ aan de rechterkant.

Voorbeeld: berekening van h_{00} op Aarde

De waarde van h_{00} op Aarde kan nu worden berekend en gecontroleerd of deze waarde verwaarloosbaar is, wat betekent dat de afwijking ten opzichte van de Minkowski-metrick, als gevolg van het gravitationele veld, is te verwaarlozen.

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2}, \quad \phi = \frac{GM_{aarde}}{R_{aarde}}$$

Of:

$$h_{00} = \frac{2GM}{c^2 R}$$

Met:

- $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- $M_{aarde} \simeq 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ $R_{aarde} \simeq 6400 \text{ km}$
- $c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Verkrijgen we:

$$h_{00} \simeq \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6.4 \cdot 10^6 \cdot (9 \cdot 10^{16})} \simeq 10^{-9}$$

Voor de Zon is dit $\sim 10^{-6}$ en voor een witte dwerg $\sim 10^{-4}$, wat bevestigt dat de zwakveldbenadering over het algemeen geldig is in veel realistische situaties.

2.9 Generaliseren van de Definitie van de Metrische Tensor

In het voorgaande zagen we hoe de geodetische vergelijking werd gegeneraliseerd van een inertiaalstelsel naar een willekeurig coördinatenstelsel. Op een vergelijkbare manier zullen we nu de definitie van de **metrische tensor** uitbreiden van de vlakke Minkowski-ruimte-tijd naar een meer algemene geometrie, namelijk een **pseudo-Riemann-variëteit**. Deze wiskundige structuur vormt de basis van de ruimtetijd in de Algemene Relativiteitstheorie.

Het Minkowski-lijnelement in een lokaal inertiaalstelsel

In een lokaal inertiaalstelsel gebruiken we de coördinaten ξ^α , met:

$$\xi^0 = ct, \quad \xi^1 = x, \quad \xi^2 = y, \quad \xi^3 = z$$

Het Minkowski-lijnelement kan als volgt worden beschreven (zie ook [Onafhankelijkheid van het Gekozen Coördinatenstelsel 2.2.1](#) vergelijking [equation 2 2 1 2](#) en zie ook [4.5.1 Uitgebreide Toelichting op de Metrische Tensor](#))

Het bijbehorende lijnelement luidt:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

waarbij $\eta_{\alpha\beta}$ de Minkowski-metrick is:

$$\eta_{\alpha\beta} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Coördinatentransformatie naar een algemeen stelsel

Laat nu x^μ een willekeurig (niet-inertiaal) coördinaatstelsel zijn, met:

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Dan is de infinitesimale variatie $d\xi^\alpha$:

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^3} dx^3$$

Door gebruik te maken van de Einstein-sommatieconventie:

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \text{ en } d\xi^\beta = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Invulling in het lijnelement geeft:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Definitie van de algemene metrische tensor

We definiëren nu de metrische tensor $g_{\mu\nu}$ als:

$$\text{metric tensor: } g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

zodat het lijnelement in het nieuwe stelsel wordt:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Eigenschappen van de metrische tensor

De eigenschappen van de metrische tensor zijn:

- **Symmetrie:**

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

Dit is het covariante metrische element.

- **Inverse metriek:**

$$g^{\mu\nu} \text{ zodanig dat } g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta^\mu_\nu$$

De inverse $g^{\mu\nu}$ wordt de **contravariante metriek** genoemd; $g_{\mu\nu}$ is de **covariante metriek**.

Belang van de metriek in de relativiteit

De metrische tensor bevat **alle informatie over de structuur van ruimte-tijd**. Zij bepaalt afstanden, hoeken, kromming en dus ook het gedrag van objecten onder invloed van zwaartekracht. In de context van de algemene relativiteitstheorie is zwaartekracht niets anders dan een manifestatie van kromming van ruimte-tijd. Die kromming wordt volledig beschreven door de metriek.

Daarom is het **fundamentele doel van de algemene relativiteitstheorie** het vinden van $g_{\mu\nu}$ — de metriek — als oplossing van de veldvergelijkingen. Eenmaal bekend, bepaalt deze tensor het verloop van vrije beweging, de kromming van ruimte en tijd, en de interactie met energie en massa.

Aantal onafhankelijke componenten

Hoewel $g_{\mu\nu}$ op het eerste gezicht 16 componenten bevat (in een 4x4-matrix), is zij symmetrisch: $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Hierdoor blijven slechts:

$$\frac{4 \cdot (4 + 1)}{2} = 10$$

onafhankelijke componenten over. Deze tien functies van ruimte-tijd vormen de onbekenden in Einstein's veldvergelijkingen.

2.10 De Riemann-Krommingstensor

De **Riemann-krommingstensor** is een van de belangrijkste concepten in de Algemene Relativiteitstheorie. Deze tensor beschrijft hoe ruimte-tijd lokaal gekromd is als gevolg van de aanwezigheid van massa en energie. Hij bepaalt hoe vectoren veranderen bij parallel transport langs kromme paden.

In vlakke, Euclidische ruimte, waarin geen zwaartekrachtseffecten voorkomen, verdwijnt de Riemann-tensor:

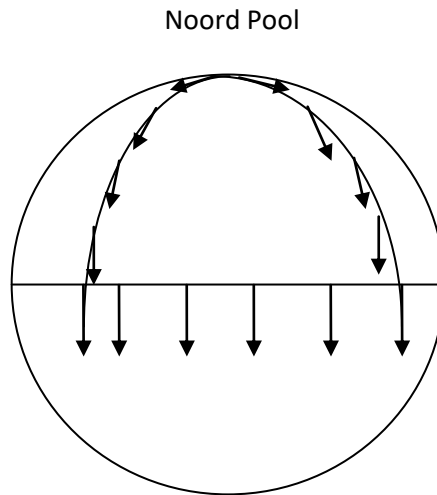
$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0 \text{ (in vlakke ruimte)}$$

In dit hoofdstuk leiden we de Riemann-tensor af op twee manieren:

1. Via de **commutator van twee covariante afgeleiden**
2. Via de methode van **geodetische deviatie**

2.10.1 Afleiding via de Commutator van de Covariante Afgeleiden.

Met behulp van het concept van parallel transport van vectoren of tensoren zullen we de uitdrukking voor de Riemann-tensor afleiden.



Parallel transport van een vector rond een gesloten lus

Een intuïtief voorbeeld van kromming vinden we op het aardoppervlak. Stel dat we met een horizontaal gehouden stok van de Noordpool langs een meridiaan naar de evenaar lopen. Daar draaien we 90 graden, lopen over de evenaar, en keren via een andere meridiaan terug naar de Noordpool. Ondanks dat we de stok in “gelijke richting” houden, wijst deze na terugkeer in een andere richting. Dit verschil komt door de kromming van het oppervlak.

Op een gelijkaardige manier kunnen we in een infinitesimale lus op een variëteit een vector parallel transporteren. In vlakke ruimte verandert de vector niet; in gekromde ruimte wél. Dit verschil bij parallel transport is rechtstreeks gekoppeld aan de Riemann-tensor.

We definiëren parallel transport als beweging waarbij de **covariante afgeleide** van een vector nul is. Om de Riemann-tensor af te leiden, onderzoeken we hoe het resultaat van tweemaal covariant differentiëren afhangt van de volgorde. De **commutator** van de covariante afgeleiden geeft ons die maat voor kromming

2.10.1.1 Covariante Afgeleide Commutator

Een commutator verwijst hier naar het verschil tussen twee bewerkingen, waarbij de ene in de ene richting plaatsvindt en de andere in de tegenovergestelde richting. De commutator wordt gedefinieerd als:

$$[AB] = AB - BA$$

De commutator is dus alleen nul wanneer de volgorde van de twee bewerkingen niet relevant is.

Om de Riemann-tensor te verkrijgen, wordt de covariante afgeleide als bewerking gekozen. De commutator van twee covariante afgeleiden meet het verschil tussen het parallel transporteren van de tensor eerst in de ene richting en vervolgens in de tegenovergestelde richting. Dus, als maat voor het verschil van de tensor langs het pad, wordt de covariante afgeleide van de tensor gebruikt.

In een vlakke ruimte maakt de volgorde van covariante afleidingen geen verschil, omdat covariante differentiatie terugvalt op partiële differentiatie, en daarom moet de commutator nul opleveren. Omgekeerd kan elk niet-nul resultaat van het toepassen van de commutator op covariante differentiatie worden toegeschreven aan de kromming van de ruimte, en dit wordt daarom aangeduid als de **Riemann-tensor**.

2.10.1.2 Afleiding van de Riemann-Tensor.

Het doel is nu om de Riemann-tensor af te leiden door de volgende commutator te vinden:

$$[\nabla_c, \nabla_b]V_a = \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a$$

We weten dat de covariante afgeleide van V_a gegeven is door (zie vergelijking 32):

$$\nabla_b V_a = \frac{\partial V_a}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^d V_d$$

En dat deze afgeleide zelf een tensor is.

Zoals we in het vorige hoofdstuk hebben gezien:

(zie vergelijking 42)

$$T_{mn}(y) = \nabla_n V_m = \frac{\partial V_m}{\partial y^n} - \Gamma_{nm}^r V_r(x)$$

Dit betekent dat:

$$T_{ab}(y) = \nabla_b V_a = \frac{\partial V_a}{\partial y^b} - \Gamma_{ba}^r V_r(x)$$

Dus, de covariante afgeleide van een vector ($\nabla_b V_a$) is een tensor (zie vergelijking 42).

De covariante afgeleide van een tensor is (zie vergelijking 43) :

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T_{\mu\nu} &= \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - T_{\beta\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^\beta - T_{\mu\gamma} \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \\ \Rightarrow \nabla_c T_{ab} &= \frac{\partial T_{ab}}{\partial x^c} - T_{eb} \Gamma_{ca}^e - T_{ae} \Gamma_{cb}^e \end{aligned}$$

Dit resulteert in:

$$\nabla_c \nabla_b V_a = \frac{\partial}{\partial x^c} (\nabla_b V_a) - \Gamma_{ac}^e \nabla_b V_e - \Gamma_{bc}^e \nabla_e V_a \quad (1)$$

De eerste term aan de rechterkant:

$$\frac{\partial}{\partial x^c} (\nabla_b V_a) = \frac{\partial^2 V_a}{\partial x^c \partial x^b} - \frac{\partial}{\partial x^c} (\Gamma_{ab}^d V_d) \quad (1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^c} (\nabla_b V_a) = \frac{\partial^2 V_a}{\partial x^c \partial x^b} - \Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} \quad (1b)$$

De tweede en derde termen aan de rechterkant:

$$\Gamma_{ac}^e \nabla_b V_e = \Gamma_{ac}^e \left(\frac{\partial V_e}{\partial x^b} - \Gamma_{be}^d V_d \right) \quad (1c)$$

$$\Gamma_{bc}^e \nabla_e V_a = \Gamma_{bc}^e \left(\frac{\partial V_a}{\partial x^e} - \Gamma_{ae}^d V_d \right) \quad (1d)$$

Door de drie termen (1b, 1c, 1d) samen te voegen in (1) krijgen we:

$$\nabla_c \nabla_b V_a = \frac{\partial^2 V_a}{\partial x^c \partial x^b} - \Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} - \Gamma_{ac}^e \left(\frac{\partial V_e}{\partial x^b} - \Gamma_{be}^d V_d \right) - \Gamma_{bc}^e \left(\frac{\partial V_a}{\partial x^e} - \Gamma_{ae}^d V_d \right) \quad (1e)$$

Door b en c te verwisselen, vinden we:

$$\nabla_b \nabla_c V_a = \frac{\partial^2 V_a}{\partial x^b \partial x^c} - \Gamma_{ac}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^b} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^e \left(\frac{\partial V_e}{\partial x^c} - \Gamma_{ce}^d V_d \right) - \Gamma_{cb}^e \left(\frac{\partial V_a}{\partial x^e} - \Gamma_{ae}^d V_d \right) \quad (2)$$

Door (1e)-(2) af te trekken compenseren de eerste en laatste termen elkaar. Aangezien het Christoffel-symbool symmetrisch wat betreft de onderste indices, dan krijgen we:

$$\nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a = -\Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} - \Gamma_{ac}^e \left(\frac{\partial V_e}{\partial x^b} - \Gamma_{be}^d V_d \right) + \Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_d}{\partial x^b} + V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} + \Gamma_{ab}^e \left(\frac{\partial V_e}{\partial x^c} - \Gamma_{ce}^d V_d \right)$$

Door de haakjes in de laatste termen uit te werken en de termen met V_d te factoriseren:

$$\begin{aligned} \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= -\Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} - \Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^b} + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d V_d + \Gamma_{ac}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^b} + V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} + \Gamma_{ab}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^c} - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d V_d \\ &= \Gamma_{ac}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} + \Gamma_{ab}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^c} - \Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^b} + \left(\frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d \right) V_d \end{aligned}$$

Vanuit [vergelijking 2.5.1.1](#) in het vorige hoofdstuk weten we:

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k e_k \quad (3)$$

Daarom:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_e}{\partial x^c} = \Gamma_{ec}^d V_d \Rightarrow \Gamma_{ab}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^c} &= \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d V_d \text{ en } \frac{\partial V_e}{\partial x^b} = \Gamma_{eb}^d V_d \Rightarrow \Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^b} = \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d V_d \\ \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= \Gamma_{ac}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} + \boxed{\Gamma_{ab}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^c}} - \boxed{\Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^b}} + \left(\frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} + \boxed{+\Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d} - \boxed{\Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d} \right) V_d \\ \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= \Gamma_{ac}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^b} + V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} \end{aligned}$$

Na het verwisselen van d met e in de eerste en de derde term aan de rechterkant:

$$\begin{aligned}\nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= \Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^b} + V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} = \\ \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d V_d + V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d V_d - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} = \\ \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= \left(\frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d \right) V_d\end{aligned}$$

We definiëren de uitdrukking binnen de haakjes aan de rechterkant als de **Riemann-tensor**, wat betekent dat:

$$\begin{aligned}[\nabla_c, \nabla_b] V_a &= \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a = R_{abc}^d V_d \\ R_{abc}^d &= \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d \\ R_{abc}^d &= \Gamma_{ac,b}^d - \Gamma_{ab,c}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d\end{aligned}$$

Dit is de **componentvorm van de Riemann-tensor**, die expliciet de afgeleiden van de Christoffel-symbolen en hun producten bevat. Deze uitdrukking laat zien hoe kromming een intrinsiek geometrisch effect is dat niet weggenomen kan worden door een verandering van coördinaten.

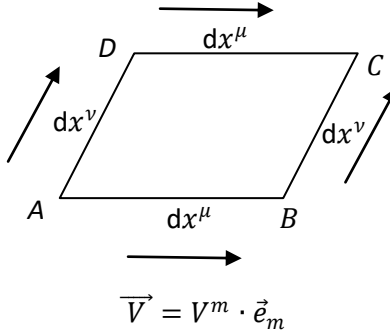
Opmerking:

Hier kan de commutator worden beschouwd als het verschil van twee vectoren. De grootte van de resulterende vector is de Riemann-tensor.

2.10.1.3 Alternatieve Afleiding van de Riemann-Tensor via de Commutator

We beschouwen een infinitesimaal gebied waarover een vector wordt verplaatst (parallel getransporteerd) via twee verschillende paden. Wanneer de variëteit vlak is, zou het verschil tussen de twee eindvectoren nul zijn. Echter, in het geval dat de variëteit intrinsiek gekromd is, zou dit leiden tot een verschil tussen de eindvectoren. Eerst verplaatsen we een vector $\vec{V}$ van punt A via B naar C. Om de richting van de beweging van de vector te bepalen, nemen we de afgeleide van de vector met respect tot dx^μ en vervolgens bekijken we de verandering van dit resultaat met respect tot dx^ν .

Daarna doen we hetzelfde van A via D naar C, nu eerst met respect tot dx^ν en vervolgens tot dx^μ . Dan trekken we beide resultaten van elkaar af, wat zou moeten leiden tot de Riemann-tensor.



De vector e_m is de raakvector, dus de afgeleide van de positievector of de afgeleide van het traject. Als het traject een rechte lijn is, dan is de afgeleide van e_m een constante; en bijgevolg is de afgeleide van e_m , en dus het Christoffel-symbool, nul.

Eerst van A naar B om de richting te bepalen, nemen we de afgeleide (zie ook vergelijking 3):

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} \cdot \vec{e}_m + V^m \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^\mu} = \frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} \cdot \vec{e}_m + V^m \Gamma_{m\mu}^k \vec{e}_k$$

Verander de twee dummy-indices, k en m . Dan kan de formule worden aangepast van k naar m en m naar γ .

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} \vec{e}_m + V^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m = \left(\frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} + V^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^m \right) \vec{e}_m$$

Dit is de covariante afgeleide van de contravariante vector $\vec{V}$. En uit de definitie van het Christoffel-symbool in de vorige hoofdstukken weten we dat $\frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^\mu} = \Gamma_{m\mu}^k \vec{e}_k$ (zie ook vergelijking 3).

Vervolgens de verandering van de richting van B naar C met betrekking tot dx^ν :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^\nu} + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m + V^\gamma \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} \vec{e}_m + V^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^m \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^\nu} \\ \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} \Gamma_{m\nu}^k \vec{e}_k + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m + V^\gamma \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} \vec{e}_m + V^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^m \Gamma_{m\nu}^k \vec{e}_k \end{aligned}$$

Vervang in het rechterlid van de vergelijking in de tweede term de indices k met m en m met γ , en verwissel in de vijfde term k en m :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^m \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m + V^\gamma \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} \vec{e}_m + V^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{kv}^m \vec{e}_m \\ \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} V^\gamma \vec{e}_m + \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{kv}^m V^\gamma \vec{e}_m + \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^m \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m \end{aligned}$$

Nu voor de andere richting, verwissel μ en ν :

$$\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\gamma\nu}^m}{\partial x^\mu} V^\gamma \vec{e}_m + \Gamma_{\gamma\nu}^k \Gamma_{k\mu}^m V^\gamma \vec{e}_m + \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^m \vec{e}_m$$

Trek nu de laatste twee vergelijkingen van elkaar af:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \\
& = \frac{\partial \Gamma_{\gamma\nu}^m}{\partial x^\mu} V^\gamma \vec{e}_m - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} V^\gamma \vec{e}_m + \Gamma_{\gamma\nu}^k \Gamma_{k\mu}^m V^\gamma \vec{e}_m - \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{k\nu}^m V^\gamma \vec{e}_m + \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \vec{e}_m - \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m \\
& \quad - \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^m \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^m \vec{e}_m - \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^m \vec{e}_m \\
& \quad = \frac{\partial \Gamma_{\gamma\nu}^m}{\partial x^\mu} V^\gamma \vec{e}_m - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} V^\gamma \vec{e}_m + \Gamma_{\gamma\nu}^k \Gamma_{k\mu}^m V^\gamma \vec{e}_m - \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{k\nu}^m V^\gamma \vec{e}_m \\
& \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \left(\frac{\partial \Gamma_{\gamma\nu}^m}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\gamma\nu}^k \Gamma_{k\mu}^m - \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{k\nu}^m \right) V^\gamma \vec{e}_m \\
& \quad \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = R_{\gamma\mu\nu}^m V^\gamma \vec{e}_m
\end{aligned}$$

Definitie van de Riemann-tensor:

De uitdrukking binnen de haakjes wordt gedefinieerd als de Riemann-tensor $R_{\gamma\mu\nu}^m$:

$$R_{\gamma\mu\nu}^m = \frac{\partial \Gamma_{\gamma\nu}^m}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\gamma\nu}^k \Gamma_{k\mu}^m - \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{k\nu}^m$$

Waarbij de Riemann-tensor de mate van kromming van de ruimte-tijd beschrijft door het verschil in parallel transport van een tensor rond een gesloten lus.

Conclusie:

Deze alternatieve afleiding van de Riemann-tensor via de commutator biedt een manier om te begrijpen hoe de kromming van de ruimte-tijd wordt bepaald door het verschil in parallel transport van tensoren. De Riemann-tensor is dus een cruciaal hulpmiddel in de Algemene Relativiteitstheorie voor het beschrijven van de geometrie en de gravitationele effecten in de ruimte-tijd.

2.10.2 Afleiding van de Riemann-Tensor via Geodetische Deviatie

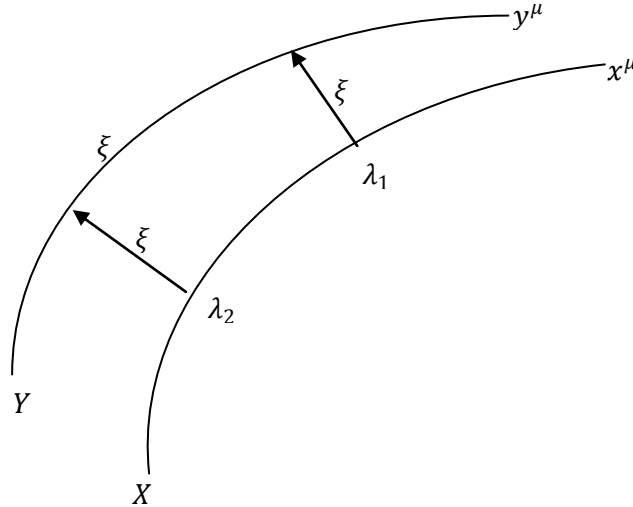
In het vorige hoofdstuk hebben we een methode getoond om de Riemann-tensor af te leiden uit de commutator van covariante afgeleiden, dat fysiek overeenkomt met het verschil tussen het parallel transporteren van een vector eerst over het ene pad en dan over het andere. Een andere interpretatie komt voort uit de relatieve versnelling van nabijgelegen deeltjes in vrije val.

Stel je een wolk van deeltjes voor in vrije val. Laten we aannemen dat een waarnemer met een van deze deeltjes meereist. Hij kijkt naar een nabijgelegen deeltje en meet de positie ervan in lokale inerte coördinaten. In de Speciale Relativiteitstheorie zal dit deeltje zich in een rechte lijn met constante snelheid bewegen, zonder versnelling. Maar wat gebeurt er in een gravitatieveld?

Zoals we ons herinneren uit het vorige hoofdstuk, generaliseert een geodetische lijn het begrip van een "rechte lijn" naar gekromde ruimtetijd.

Hier zullen we laten zien hoe de evolutie van de afstand gemeten tussen twee naburige geodetische lijnen, ook wel geodetische deviatie genoemd, inderdaad gerelateerd kan zijn aan een niet-nul kromming van de ruimtetijd, of in Newtoniaanse termen, aan de aanwezigheid van *getijdenkrachten*. Laten we dus twee deeltjes beschouwen die twee zeer nabije geodetische lijnen volgen.

Hun respectieve pad kan worden beschreven door de functies $x^\mu(\tau)$ (voor het referentiedeeltje) en $y^\mu(\tau) \equiv x^\mu(\tau) + \xi^\mu(\tau)$ (voor het tweede deeltje) waarbij τ (tau) de eigen tijd langs de wereldlijn van het referentiedeeltje is, en waarbij ξ^μ verwijst naar de afwijkingsvier-vector die het ene deeltje met het andere verbindt op elk gegeven moment τ .



De relatieve versnelling A^α van de twee objecten wordt ruwweg gedefinieerd als de tweede afgeleide van de scheidingsvector ξ^α terwijl de objecten langs hun respectieve geodeten voortbewegen.

Ons doel in dit hoofdstuk is om aan te tonen dat deze relatieve versnelling gerelateerd is aan de Riemann-tensor via de volgende vergelijking:

$$\left(\frac{d^2\xi}{d\tau^2}\right)^\alpha = -R^\alpha_{\mu\sigma\nu} u^\nu u^\mu \xi^\sigma$$

In het geval dat de ruimte-tijd vlak is, is de Riemann-tensor nul, wat resulteert in een nul relatieve versnelling.

Aangezien elk deeltje een geodetische lijn volgt, is de vergelijking van hun respectieve coördinaat als volgt (zie [vergelijking 2.6.1](#)):

$$0 = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x^\alpha(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$0 = \frac{d^2 y^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(y^\alpha(\tau)) \frac{dy^\mu}{d\tau} \frac{dy^\nu}{d\tau}$$

In elk van deze vergelijkingen is het Christoffel-symbool gelijk op elke respectievelijke positie van de deeltjes x en y . Aangezien de scheiding tussen de deeltjes infinitesimaal is, evalueren we het Christoffel-symbool op de positie $y^\alpha(\tau)$ door middel van een Taylor-reeksontwikkeling:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \dots \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Bij benadering tot de eerste afgeleide omdat ξ is infinitesimaal is.

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(y^\alpha(\tau)) \approx \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x^\alpha(\tau)) + \xi^\sigma [\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha](x^\alpha(\tau))$$

Dit kan ook benaderd worden als volgt voor een infinitesimale Δx :

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x)}{dx} &= \frac{\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x + \Delta x) - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x)}{\Delta x} \\ \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x + \Delta x) &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x) + \Delta x \frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x)}{dx} \\ \Delta x &= \xi \\ \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x + \xi) &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x) + \xi \frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x)}{dx} \end{aligned}$$

Met de aanname dat $y^\alpha(\tau) = x^\alpha(\tau) + \xi^\alpha(\tau)$ en door deze laatste uitdrukking te vervangen in de geodetische vergelijking van deeltjes y , krijgen we:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 y^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(y^\alpha(\tau)) \frac{dy^\mu}{d\tau} \frac{dy^\nu}{d\tau} \\ 0 &= \frac{d^2(x^\alpha + \xi^\alpha)}{d\tau^2} + [\Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha)] \frac{d(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau} \frac{d(x^\nu + \xi^\nu)}{d\tau} \\ 0 &= \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + [\Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha)] \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{d\xi^\mu}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \right) \end{aligned}$$

Hier worden het Christoffel-symbool en zijn eerste orde afgeleiden nu geëvalueerd op $x^\alpha(\tau)$.

Door alle termen in de haakjes uit te werken en de termen van de tweede orde met betrekking tot ξ te verwaarlozen, krijgen we:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau} + \frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \cancel{\frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau}} \right) + \\ &\quad + \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \cancel{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau}} + \cancel{\frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} + \cancel{\frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau}} \right) \end{aligned}$$

Aangezien we weten dat het Christoffel-symbool symmetrisch is ten opzichte van de lagere indices, kunnen deze worden omgewisseld:

$$0 = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + 2 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \right) + \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Door de geodetische vergelijking van deeltje x te gebruiken, zoals gegeven (zie [equation 2.6.1](#)):

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Dan vallen de eerste en de derde term weg. Dan verkrijgen we:

$$0 = \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau} + \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) u^\mu u^\nu$$

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = -2\Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau} - \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) u^\mu u^\nu$$

Hier is $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ de vier-snelheidsvector van het referentiedeeltje.

Vervolgens hebben we een uitdrukking voor $\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}$, maar dit is niet de totale afgeleide van de vier-vector ξ , aangezien de afgeleide ook een bijdrage kan krijgen van de verandering van de basisvectoren terwijl het object zich langs zijn geodetische lijn beweegt. Om de totale afgeleide te krijgen, gebruiken we:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (\xi^\alpha e_\alpha) = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} e_\alpha + \xi^\alpha \frac{de_\alpha}{d\tau} = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} e_\alpha + \xi^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{de_\alpha}{dx^\mu}$$

Door de dummy-index α te vervangen door σ in de tweede term en gebruik te maken van de definitie van het Christoffel-symbool, krijgen we:

$$\xi^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{de_\sigma}{dx^\mu} = \xi^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha e_\alpha = \xi^\sigma u^\mu \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha e_\alpha$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} e_\alpha + \xi^\sigma u^\mu \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha e_\alpha = \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \xi^\sigma u^\mu \right) e_\alpha$$

Zodat:

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \xi^\sigma u^\mu$$

Aangezien we nog steeds te maken hebben met de voorwaarde dat ξ een vier-vector is, is de afgeleide ervan met respect tot de eigen tijd ook een vier-vector, dus we kunnen de tweede absolute afgeleide vinden door dezelfde ontwikkeling te gebruiken als voor de afgeleide van eerste orde.

$$\left(\frac{d}{d\tau} \left[\frac{d\xi}{d\tau} \right] \right)^\alpha = \frac{d}{d\tau} \left(\left[\frac{d\xi}{d\tau} \right]^\alpha \right) + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^\sigma u^\mu$$

$$\left(\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} \right)^\alpha = \left(\frac{d}{d\tau} \left[\frac{d\xi}{d\tau} \right] \right)^\alpha = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \xi^\sigma \right) + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \left(\frac{d\xi^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma u^\beta \xi^\gamma \right)$$

$$= \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{d\tau} u^\mu \xi^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \frac{du^\mu}{d\tau} \xi^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma u^\mu u^\beta \xi^\gamma$$

Door de Christoffelsymbolen en Taylorreeks boven te gebruiken en ν te vervangen door σ in de **eerste term**, krijgen we:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = -2\Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau} - \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{dx^\sigma} \right) u^\mu u^\nu \xi^\sigma$$

Wissel in de eerste term, aan de rechterkant, ν en σ om:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = -2\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau} - \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{dx^\sigma} \right) u^\mu u^\nu \xi^\sigma$$

We kunnen de **tweede term** herschrijven, aangezien de Christoffelsymbolen afhankelijk zijn van τ door afhankelijk te zijn van de positie van het referentiedeeltje:

$$\Rightarrow \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{d\tau} u^\mu \xi^\sigma = \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{dx^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} u^\mu \xi^\sigma = \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{dx^\nu} u^\nu u^\mu \xi^\sigma$$

Door de geodetische vergelijking te gebruiken, kunnen we de **derde term** herschrijven, d.w.z. $\frac{du^\mu}{d\tau}$ uitwerken:

$$\begin{aligned} u^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\tau} \\ \frac{du^\mu}{d\tau} &= \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \\ \text{Geodetische vergelijking: } \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} &= -\Gamma_{\nu\gamma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = -\Gamma_{\nu\gamma}^\mu u^\nu u^\gamma = \frac{du^\mu}{d\tau} \\ \Rightarrow \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \frac{du^\mu}{d\tau} \xi^\sigma &= -\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\gamma}^\mu u^\nu u^\gamma \xi^\sigma \end{aligned}$$

Wissel, in de rechterterm, μ en γ om:

$$\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \frac{du^\mu}{d\tau} \xi^\sigma = -\Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\gamma u^\nu u^\mu \xi^\sigma$$

Ook, om een uitdrukking voor $u^\nu u^\mu \xi^\sigma$, te verkrijgen, met alleen μ, ν en σ , kunnen we de **laatste term** herschrijven door de dummy-indices σ en β te hernoemen:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma u^\mu u^\beta \xi^\gamma &= \\ (\sigma \leftrightarrow \gamma) &= \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma u^\mu u^\beta \xi^\sigma \\ (\beta \leftrightarrow \nu) &= \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\nu\sigma}^\gamma u^\mu u^\nu \xi^\sigma \\ (\mu \leftrightarrow \nu) &= \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\gamma u^\nu u^\mu \xi^\sigma \end{aligned}$$

Dus uiteindelijk kunnen we, door alle termen te vervangen, schrijven:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} \right)^\alpha &= \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{d\tau} u^\mu \xi^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \frac{du^\mu}{d\tau} \xi^\sigma + \left(\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau} \right) + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma u^\mu u^\beta \xi^\gamma \\ &= \cancel{-2\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau}} - \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{dx^\sigma} \right) u^\mu u^\nu \xi^\sigma + \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{dx^\nu} u^\nu u^\mu \xi^\sigma - \Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\gamma u^\nu u^\mu \xi^\sigma + \cancel{2\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau}} + \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\gamma u^\nu u^\mu \xi^\sigma \end{aligned}$$

Door de eerste en de vijfde term te schrappen en de gemeenschappelijke factor $u^\nu u^\mu \xi^\sigma$ eruit te halen verkrijgen we:

$$\left(\frac{d^2\xi}{d\tau^2}\right)^\alpha = -\left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{dx^\sigma} - \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{dx^\nu} + \Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\gamma - \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\gamma\right) u^\nu u^\mu \xi^\sigma$$

Omdat dit nog steeds een tensorvergelijking is, is de hoeveelheid tussen de haakjes een tensor en kunnen we de **Riemann-tensor** definiëren als:

$$R_{\mu\sigma\nu}^\alpha = \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{dx^\sigma} - \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{dx^\nu} + \Gamma_{\sigma\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\gamma - \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\gamma\right)$$

Dan kunnen we de bovenstaande vergelijking herschrijven in een kortere uitdrukking, bekend als **de geodetische deviatievergelijking**:

$$\left(\frac{d^2\xi}{d\tau^2}\right)^\alpha = -R_{\mu\sigma\nu}^\alpha u^\nu u^\mu \xi^\sigma$$

Aangezien de enige grootte in deze vergelijking die intrinsiek afhankelijk is van de metriek de Riemann-tensor is, zien we dat als deze identiek aan nul is dat dan de ruimte-tijd vlak is. Maar als slechts één component van deze tensor niet nul is, dan is de ruimte-tijd gekromd.

Samenvatting:

- De Riemann-tensor beschrijft de kromming van ruimte-tijd.
- Ze kan worden afgeleid via de commutator van covariante afgeleiden, of via de geodetische deviatievergelijking.
- Haar componentenvorm is:

$$R_{\mu\sigma\nu}^\alpha = \frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{dx^\sigma} - \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{dx^\nu} + \Gamma_{\sigma\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\gamma - \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\gamma$$

- Voor een geodetische lijn geldt de volgende eigenschap:

$$0 = \frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial\tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} \quad \text{Geodetische vergelijking}$$

- Of:

$$\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\beta u^\nu u^\mu$$

- Terwijl voor de afwijking van één geodetische naar een infinitesimaal nabijgelegen geodetische lijn geldt:

$$\left(\frac{d^2\xi}{d\tau^2}\right)^\alpha = -R_{\mu\sigma\nu}^\alpha u^\nu u^\mu \xi^\sigma \quad \text{Geodetische deviatievergelijking}$$

- Een niet-nul Riemann-tensor impliceert gekromde ruimte-tijd en daarmee de aanwezigheid van zwaartekracht.

2.11 Symmetrieën en Onafhankelijke Componenten

In de voorgaande hoofdstukken hebben we de vrij complexe uitdrukking voor de Riemann-krommingstensor afgeleid — een combinatie van afgeleiden en producten van Christoffel-symbolen, met in totaal 256 (=4⁴) componenten in een vierdimensionale ruimte-tijd. In dit hoofdstuk tonen we aan dat de Riemann-tensor in werkelijkheid slechts 20 onafhankelijke componenten heeft, en dat deze volledig worden bepaald door de symmetrieën van de tensor en de tweede-orde afgeleiden van de metriek.

We onderzoeken deze symmetrieën in een Lokaal Inertiaal Frame (LIF), waarin alle Christoffel-symbolen in de oorsprong nul zijn. Deze symmetrieën zijn echter niet beperkt tot dit specifieke stelsel: omdat tensorvergelijkingen coördinaten-onafhankelijk zijn, gelden ze in elk referentiekader.

Definitie en Herformulering

De Riemann-tensor is in het algemeen gedefinieerd als:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \equiv \frac{d\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}}{dx^{\mu}} - \frac{d\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}}{dx^{\nu}} + \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\beta\nu}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\beta\mu}^{\gamma}$$

Wetende dat alle Christoffel-symbolen, $\Gamma = 0$, nul zijn in de oorsprong van het Lokale Inertiaal Frame, reduceert dit tot:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \equiv \frac{d\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}}{dx^{\mu}} - \frac{d\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}}{dx^{\nu}}$$

Door het contractiemechanisme toe te passen, kunnen we de Riemann-tensor herschrijven met alle indices verlaagd:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha\sigma} R_{\beta\mu\nu}^{\sigma} \equiv g_{\alpha\sigma} \left[\frac{d\Gamma_{\beta\nu}^{\sigma}}{dx^{\mu}} - \frac{d\Gamma_{\beta\mu}^{\sigma}}{dx^{\nu}} \right]$$

De Christoffel-symbolen kunnen worden uitgedrukt in termen van de metriek:

$$\Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} \left(\frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\gamma}} \right)$$

Zodat we kunnen schrijven:

$$g_{\alpha\sigma} \frac{d\Gamma_{\beta\nu}^{\sigma}}{dx^{\mu}} = \frac{1}{2} g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\gamma}} \right) + \frac{1}{2} g_{\alpha\sigma} \frac{\partial g^{\sigma\gamma}}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\gamma}} \right) \quad (1)$$

De **tweede term** is nul omdat de Christoffel-symbolen nul zijn op de oorsprong van het lokale inertiële frame, zoals hierboven vermeld:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} g_{\alpha\sigma} \frac{\partial g^{\sigma\gamma}}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\gamma}} \right) = \\ & = g_{\alpha\sigma} \frac{\partial g^{\sigma\gamma}}{\partial x^{\mu}} g_{\sigma\gamma} \left(\frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} \left(\frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\gamma}} \right) \right) = \end{aligned}$$

$$= g_{\alpha\sigma} \frac{\partial g^{\sigma\gamma}}{\partial x^\mu} g_{\sigma\gamma} \Gamma_{\beta\nu}^\sigma = 0$$

Met dit resultaat en uit vergelijking (1) volgt:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\sigma} \frac{d\Gamma_{\beta\nu}^\sigma}{dx^\mu} &= \frac{1}{2} \delta_\alpha^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\gamma} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \end{aligned}$$

Wisselen van indices μ en ν , leidt tot de tweede term van de uitdrukking van de Riemann-tensor:

$$g_{\alpha\sigma} \frac{d\Gamma_{\beta\mu}^\sigma}{dx^\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

De middelste termen verdwijnen na het aftrekken van de laatste twee uitdrukkingen, wat resulteert in:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= g_{\alpha\sigma} \left[\frac{d\Gamma_{\beta\nu}^\sigma}{dx^\mu} - \frac{d\Gamma_{\beta\mu}^\sigma}{dx^\nu} \right] \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Vermenigvuldigd met -1:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} \right] \quad (3)$$

Wisselen van μ en ν in (2):

$$R_{\alpha\beta\nu\mu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} \right] \quad (4)$$

Dus, uit (3) en (4) krijgen we:

$$\boxed{R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}}$$

Houd er rekening mee dat deze vergelijking alleen geldig is op de oorsprong van het Lokale Inertiële Frame. Maar aangezien dit tensorvergelijkingen zijn en, zoals we weten, als deze tensorvergelijkingen geldig zijn in één referentiekader, zijn ze geldig in elk referentiekader.

Nu zullen we op een vergelijkbare manier aantonen dat de Riemann-tensor symmetrisch is door de eerste twee indices te verwisselen:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} \right] \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} \right] \\ R_{\beta\alpha\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}}$$

Als we de eerste en derde indices ($\alpha \leftrightarrow \mu$), and en ook de tweede en vierde ($\beta \leftrightarrow \nu$), verwisselen, krijgen we:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} \right]$$

$$\boxed{R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}}$$

Als we de laatste drie indices β, μ en ν cyclisch permuteren en de drie termen optellen, krijgen we:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} &= \frac{1}{2} \left[\cancel{\frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu}} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu}} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu}} - \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}} - \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[\cancel{\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}} - \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta}} - \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu}} \right] \\ &\boxed{R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0} \end{aligned}$$

Symmetrie-eigenschappen

Uit de bovenstaande uitdrukking kunnen we de volgende symmetrieën van de Riemann-tensor afleiden:

1. **Antisymmetrie in de laatste twee indices:**

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}$$

2. **Antisymmetrie in de eerste twee indices:**

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}$$

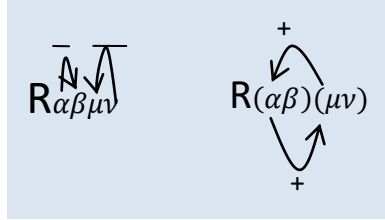
3. **Symmetrie onder verwisseling van indexparen:**

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

4. **De eerste Bianchi-identiteit (cyclische symmetrie):**

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$$

Of weergegeven als:



Aantal Onafhankelijke Componenten

In een vierdimensionale ruimte-tijd zou een willekeurige (0,4)-tensor 256 componenten hebben. Door de hierboven genoemde symmetrieën vermindert dit aantal drastisch:

- Door antisymmetrie in $(\alpha\beta)$ en $(\mu\nu)$: van $4^4 = 256$ naar $\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} = 6 \times 6 = 36$
- Symmetrie tussen de paren: $36 \rightarrow \frac{6 \times (6+1)}{2} = 21$
- Bianchi-identiteit: vermindert het aantal verder tot **20 onafhankelijke componenten**

Conclusie

Hoewel de oorspronkelijke uitdrukking van de Riemann-tensor complex lijkt, wordt deze dankzij zijn rijke symmetriestructuur volledig bepaald door slechts 20 onafhankelijke componenten. Deze componenten representeren alle mogelijke vormen van kromming in een vierdimensionale ruimte-tijd en vormen daarmee de kern van de geometrische beschrijving van zwaartekracht in de algemene relativiteitstheorie.

2.12 Bianchi-Identiteit en Ricci Tensor

De Bianchi-identiteit speelt een cruciale rol bij het afleiden van de veldvergelijkingen van Einstein. Hoewel de Riemann-krommingstensor zelf niet direct in deze vergelijkingen voorkomt, kunnen we uit deze tensor — via contractie — twee andere belangrijke krommingsgrootheden afleiden: de Ricci-tensor en de Ricci-scalar.

In dit hoofdstuk zullen we deze drie fundamentele objecten introduceren en hun onderlinge verband toelichten, te beginnen met de afleiding van de Bianchi-identiteit.

Bianchi-identiteit

De Bianchi-identiteit luidt:

$$\nabla_\sigma R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0$$

Uit het vorige hoofdstuk [2.11 Symmetrieën en Onafhankelijke Componenten](#) weten we dat in de oorsprong van een Lokaal Inertieel stelsel de Riemann-tensor geschreven kan worden als:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} \right]$$

Omdat de Christoffel-symbolen in de oorsprong van dit stelsel verdwijnen, wordt de covariante afgeleide daar gelijk aan de gewone afgeleide:

$$\nabla_\sigma V^\alpha = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\sigma}$$

Dus, in de oorsprong geldt:

$$\nabla_\sigma R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\partial R_{\alpha\beta\mu\nu}}{\partial x^\sigma}$$

Substitutie van de uitdrukking voor de Riemann-tensor levert:

$$\nabla_\sigma R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} \right]$$

Door de index van de afgeleide cyclisch te permuteren met de laatste twee indices, μ, ν , van de tensor, krijgen we:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu R_{\alpha\beta\sigma\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} R_{\alpha\beta\sigma\mu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\sigma} \right] \\ \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\sigma} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} R_{\alpha\beta\nu\sigma} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\sigma} \right] \end{aligned}$$

Door deze drie vergelijkingen op te tellen en gebruik te maken van de commutativiteit van partiële afgeleiden, zien we dat de termen paargewijs elkaar opheffen, en krijgen we **de Bianchi-identiteit**:

$$\boxed{\nabla_\sigma R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0}$$

Deze Bianchi-identiteit is een tensorvergelijking die universeel geldig is — in elk coördinatenstelsel.

2.12.1 De Ricci-Tensor

In het volgende hoofdstuk zullen we ons bezighouden met de energie-impuls-tensor. Deze tensor is een rang-2 tensor. Om deze reden moeten we de rang-4 Riemann-tensor aanpassen naar een rang-2 tensor, die de Ricci-tensor wordt genoemd. Dit kan worden gedaan door de covariante Riemann-tensor te vermenigvuldigen met een rang-2 contravariante metrische tensor, waarbij twee gemeenschappelijke indices worden gedeeld. Dit proces wordt contractie genoemd.

Door contractie van de eerste en derde index van de Riemann-tensor verkrijgen we de **Ricci-tensor**:

$$g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = R_{\mu\beta\nu}^{\beta} = R_{\mu\nu}$$

De Ricci-tensor is symmetrisch:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

2.12.2 De Ricci-Scalar

Door de Ricci-tensor te vermenigvuldigen met de metrische tensor met dezelfde indices, wordt de Ricci-tensor gecontracteerd, wat resulteert in de **Ricci-scalar**:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Deze scalaire kromming R is het spoor van de Ricci-tensor.

Deze tensoren — de Ricci-tensor en Ricci-scalar — vormen samen met de metriek $g_{\mu\nu}$ de bouwstenen van de veldvergelijkingen van Einstein. De Bianchi-identiteit garandeert bovendien de behoudswetten die uit deze vergelijkingen voortvloeien.

2.13 Energie-Impuls Tensor

Het uiteindelijke doel van de algemene relativiteitstheorie is het opstellen van een relatie tussen de geometrie van de ruimtetijd en de materie of energie die deze vervormt. Daarvoor is een geschikt wiskundig object nodig dat de inhoud van de ruimtetijd beschrijft: de **energie-impuls-tensor**.

In de speciale relativiteitstheorie is reeds aangetoond dat massa, energie en impuls onderling verbonden zijn. Deze relatie wordt uitgedrukt via de bekende energie-impulsvergelijking:

$$\begin{aligned} |P|^2 &= (m_0 c)^2 \\ |P|^2 &= \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \\ \Rightarrow (m_0 c)^2 &= \frac{E^2}{c^2} - p^2 \end{aligned}$$

Waaruit volgt:

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

Dit suggereert dat, binnen de algemene relativiteit, **niet alleen massa**, maar ook **energie en impuls** bijdragen aan het zwaartekrachtsveld.

In de Newtoniaanse limiet beschrijft de vergelijking van Poisson het zwaartekrachtsveld Φ , opgewekt door een massadichtheid ρ (zie: vergelijking 16 in [Appendix 5](#)):

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\Phi) = 4\pi G\rho$$

Dit roept de vraag op: wat is het relativistische equivalent van de energiedichtheid? Is het een scalar, een vector, of iets anders?

Transformatie-eigenschappen: het voorbeeld van een stofwolk

Beschouw een volume $dx \cdot dy \cdot dz$ gevuld met niet-interagerende deeltjes die in rust zijn ten opzichte van elkaar — een zogenaamde **stofwolk**. In het ruststelsel S van deze wolk is de energiedichtheid:

$$\rho_0 = m_0 n_0$$

waarbij m_0 de rustmassa van een deeltje is en n_0 de getalsdichtheid.

In een ander referentiekader S' , dat met een snelheid v in de x -richting beweegt, levert de Lorentz-transformatie:

- Massa: $m_0 \rightarrow m_0 \gamma$,
- Dichtheid: $n_0 \rightarrow n_0 \gamma$ (wegens lengtecontractie)
- Dus: $\rho = \rho_0 \gamma^2$

Aangezien ρ **niet invariant** is, kan het geen scalar zijn. Het is ook **geen component van een viervector**, want dan zou het slechts lineair met γ transformeren. De transformatie γ^2 suggereert dat ρ zich gedraagt als een component van een **rank-2 tensor** — namelijk als de tt -component van een symmetrische tensor.

De energie-impuls-tensor van stof

De viersnelheidsvector van de stofwolk in S' is:

$$u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} = v^\mu \frac{dt}{d\tau} = v^\mu u^t$$

$$u^\mu = \gamma(1, v) = \begin{pmatrix} \gamma \\ v_x \gamma \\ v_y \gamma \\ v_z \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^t \\ v_x u^t \\ v_y u^t \\ v_z u^t \end{pmatrix}$$

Met $u^t = \gamma$, en wetende dat de energie van elk deeltje $p^t = m u^t$ is, geldt voor de totale energiedichtheid:

$$\rho = n p^t = (n_0 u^t)(m u^t) = (n_0 m) u^t u^t = \rho_0 (u^t)^2$$

Dit suggereert dat ρ de tt -component is van een rank-2 tensor van de vorm:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} = \rho_0 u^\mu u^\nu$$

Deze tensor is **symmetrisch** ($T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$) en wordt de **energie-impuls-tensor** genoemd, ook wel de **stress-energie-tensor** voor stof.

Deze tensor vormt de schakel tussen materie/energie en de kromming van de ruimtetijd in de veldvergelijkingen van Einstein. In latere hoofdstukken zullen we zien hoe deze tensor voorkomt aan de rechterkant van Einstein's vergelijkingen.

2.13.1 Fysische Betekenis van de Energie-Impuls-Tensor

De energie-impuls-tensor is een tweede-orde tensor, wat betekent dat hij 16 componenten bevat in de vorm van een 4x4-matrix:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{tt} & T^{tx} & T^{ty} & T^{tz} \\ T^{xt} & T^{xx} & T^{xy} & T^{xz} \\ T^{yt} & T^{yx} & T^{yy} & T^{yz} \\ T^{zt} & T^{zx} & T^{zy} & T^{zz} \end{pmatrix}$$

Zoals eerder besproken, representeert T^{tt} de energiedichtheid, oftewel de dichtheid van relativistische massa. Maar wat betekenen de andere 15 componenten fysisch?

Tijd-ruimte-componenten: energiestroom

Laten we eerst de component T^{tx} bekijken. Uit de definitie:

$$T^{tx} = \rho_0 u^t u^x = (n_0 m) u^t u^x = (n_0 u^t)(m u^x) = (n_0 u^t)(m u^t) v_x = n p^t v_x$$

We kunnen dit herschrijven als:

$$T^{tx} = \frac{n A v_x dt \cdot p^t}{A dt}$$

Hierbij representeert $A v_x dt$ het volume stof dat gedurende het tijdsinterval dt door een oppervlak A beweegt, loodrecht op de x-richting. Dit volume komt overeen met het aantal deeltjes dat door dat oppervlak passeert. Dus:

T^{tx} is de **energieflux** per oppervlakte-eenheid per tijdseenheid in de x-richting.

Op dezelfde manier representeren:

- T^{ty} : de energiestroom in de y-richting
- T^{tz} : de energiestroom in de z-richting

Omdat $T^{\mu\nu}$ symmetrisch is ($T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$), geldt:

$$T^{xt} = T^{tx}, \quad T^{yt} = T^{ty}, \quad T^{zt} = T^{tz}$$

Tijd-ruimte-componenten: impulsstromen (stress)

Beschouwen we nu de componenten met beide indices ruimtelijk, dus T^{kl} met $k, l \in \{x, y, z\}$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} T^{kl} &= \rho_0 u^k u^l = (n_0 m) u^k u^l = (n_0 m) u^t v_k u^l \\ &= (n_0 u^t) v_k (m u^l) = n v_k (m u^l) = n v_k p^l \end{aligned}$$

Opnieuw kunnen we dit schrijven als:

$$T^{kl} = \frac{n A v_k dt \cdot p^l}{A dt}$$

Hier is $n A v_k dt$ het volume dat in de richting k door oppervlak A stroomt, en dus is T^{kl} de **flux van impulscomponent p^l in de richting k** .

Bijvoorbeeld:

- T^{xz} : flux van z-impuls in x-richting
- T^{xy} : flux van y-impuls in x-richting
- T^{zz} : flux van z-impuls in z-richting (druk)

Omdat de tensor symmetrisch is, geldt ook:

$$T^{xz} = T^{zx}, \quad T^{xy} = T^{yx}, \quad T^{yz} = T^{zy}, \dots$$

Samenvattend:

- T^{tt} = energiedichtheid
- T^{ti} of T^{it} = energiestroom in richting i
- T^{ij} = flux van impuls j in richting i (stress, druk en schuifspanning)

Deze interpretatie maakt duidelijk waarom $T^{\mu\nu}$ het juiste object is om de **volledige fysische inhoud** van een systeem te beschrijven — van energie- en massadichtheid tot impulsstromen en spanningen — en dus als bron van zwaartekracht in de algemene relativiteit fungeert.

2.13.2 Covariante Differentiatie van de Energie-Impuls-Tensor

In de platte ruimtetijd van de Speciale Relativiteitstheorie kunnen de wetten van behoud van energie en impuls — oftewel het feit dat energie en impuls niet verloren gaan of ontstaan — wiskundig worden uitgedrukt als:

$$0 = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \partial^\nu T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{;\nu}$$

Deze uitdrukking is een direct gevolg van **Noether's stelling**, toegepast op de translatie-invariantie van ruimte en tijd: de wetten van de natuur veranderen niet als we het systeem een stukje verplaatsen in ruimte of tijd. Deze symmetrie leidt tot behoud van impuls en energie.

Van Platte naar Gekromde Ruimtetijd

In de Algemene Relativiteitstheorie beschrijven we fysica in een gekromde ruimtetijd, waarin gewone afgeleiden niet volstaan. We vervangen daarom de partiële afgeleide door de **covariante afgeleide**:

$$\partial_\nu \rightarrow \nabla_\nu$$

Toegepast op de energie-impuls-tensor levert dit:

$$0 = \nabla_\nu T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{;\nu}$$

Deze vergelijking is een tensorvergelijking en is daarom **algemeen covariant** — dat wil zeggen, geldig in elk coördinatenstelsel, vlak of gekromd. Dit maakt het een natuurlijke kandidaat voor een fundamenteel behoudsprincipe binnen de algemene relativiteit.

2.14 Einstein Tensor

De Poisson-vergelijking voor het zwaartekrachtsveld in de klassieke (Newtoniaanse) mechanica luidt als volgt (zie [vergelijking appendix 5 16](#)):

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\Phi) = 4\pi G\rho$$

Waarbij Φ het zwaartekrachts-potentiaal is, en ρ de massadichtheid.

Ons doel is nu het vinden van een relativistische generalisatie van deze vergelijking. Zoals we in hoofdstuk [2.13.1](#) hebben gezien, wordt de klassieke massadichtheid ρ in de algemene relativiteit vervangen door de energie-impuls-tensor $T^{\mu\nu}$. Deze tensor beschrijft niet alleen massa, maar ook energie, impuls en druk — alle vormen van energie-inhoud van de ruimtetijd.

Het ligt dan voor de hand om te veronderstellen dat de relativistische veldvergelijking van Einstein de volgende vorm moet hebben:

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$

Hierbij is $G^{\mu\nu}$ de **Einstein-tensor** en κ een nog te bepalen constante. De Einstein-tensor bevat alle informatie over de kromming van de ruimtetijd en vervult de rol van de linkerkant van de veldvergelijking.

Eisen aan de Einstein-tensor

Op basis van de fysische en wiskundige vereisten waaraan de veldvergelijking moet voldoen, moet de Einstein-tensor $G^{\mu\nu}$ aan de volgende eigenschappen voldoen:

- Hij moet **verdwijnen in vlakke ruimtetijd**, zoals $\vec{g} = 0$ in de afwezigheid van massa.
- Hij moet de **ruimtetijdkromming beschrijven** op een manier die **lineair afhankelijk is van de Riemann-krommingstensor**.
- Hij moet een **symmetrische rang-2 tensor** zijn, net als $T^{\mu\nu}$.
- Hij moet een **nulpuntdivergentie** hebben: $\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0$, zodat de wet van behoud van energie en impuls behouden blijft ($\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$).
- In de **Newtoniaanse limiet** moet hij terugvallen op de Poisson-vergelijking: $\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$.

In het volgende hoofdstuk zullen we de concrete vorm van de Einstein-tensor afleiden, die voldoet aan al deze voorwaarden.

2.14.1 Eerste Poging met de Ricci-Tensor als Oplossing

Zoals we in hoofdstuk [2.8](#) hebben gezien, is het zwaartekrachts-potentiaal Φ gekoppeld is aan de 00-component van de metriek via:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\Phi = -\overrightarrow{grad}\Phi \quad \text{met} \quad \Phi = \frac{c^2 h_{00}}{2}$$

Het lijkt dan logisch om te zoeken naar een tensor die — net als de Laplaciaan — tweede afgeleiden van de metriek bevat. De Riemann-tensor voldoet hieraan, en is bovendien de enige bekende tensor die de ruimtetijdkromming op fundamentele wijze beschrijft.

Omdat we een rang-2 tensor nodig hebben (zoals vereist in de Einstein-veldvergelijking), is het zinvol om eerst te kijken naar de gecontracteerde vorm van de Riemann-tensor: de **Ricci-tensor**. We herinneren ons:

$$R_{\mu\sigma\nu}^{\alpha} = \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{dx^{\sigma}} - \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}}{dx^{\nu}} + \Gamma_{\sigma\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\sigma}^{\gamma} \right)$$

Door contractie op de bovenste en derde index krijgen we de Ricci-tensor:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{dx^{\alpha}} - \frac{d\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha}}{dx^{\nu}} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^{\gamma} \right)$$

In de Newtoniaanse limiet, voor een zwak en statisch gravitatieveld, draagt slechts één term bij aan R_{00} . We vinden:

$$R_{00} = R_{00\alpha}^{\alpha} = \Gamma_{00,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{0\alpha,0}^{\alpha} + \mathcal{O}(h^2) = \Gamma_{00,i}^i$$

Aangezien we ons beperken tot een statisch veld, verdwijnt de tijdsafgeleide en blijft over:

$$R_{00} = \Gamma_{00,i}^i$$

Gebruikmakend van het eerder afgeleide resultaat voor het Christoffel-symbool in deze benadering:

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} g^{ij} g_{00,j} \approx \frac{1}{2} \partial_i h_{00}$$

Met de benadering $g^{ij} = \eta^{ij}$ en $g_{00,j} = h_{00,j}$ volgt:

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \eta^{ij} h_{00,j} = \frac{1}{2} \delta_j^i h_{00,j}$$

$$\Gamma_{00,i}^i = \frac{1}{2} \delta_j^i h_{00,ij} = \frac{1}{2} h_{00,ii}$$

$$R_{00} = \Gamma_{00,i}^i = \frac{1}{2} (\partial_1^2 h_{00} + \partial_2^2 h_{00} + \partial_3^2 h_{00})$$

Invullen van $h_{00} = 2\Phi/c^2$ geeft:

$$R_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi$$

En dus:

$$R_{00} = \frac{4\pi G\rho}{c^2}$$

Dit resultaat suggereert dat een veldvergelijking van de vorm:

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

zou kunnen voldoen aan de Newtoniaanse limiet, met $\kappa = 8\pi G/c^4$ als kandidaat-constante.

Einstein was in 1915 inderdaad aanvankelijk overtuigd van deze vergelijking. Hiermee loste hij zelfs het al jaren onopgeloste probleem van de precessie van het perihelium van Mercurius op. In een brief schreef hij enthousiast:

“Een paar dagen was ik buiten mezelf van vreugdevolle opwinding.”

Toch moest hij deze eerste poging uiteindelijk verwerpen. De reden was dat de Ricci-tensor in het algemeen **geen nulpuntdivergentie** heeft, terwijl de energie-impuls-tensor $T_{\mu\nu}$ dat wél heeft ($\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$). Hierdoor kon deze vorm niet voldoen aan het vereiste behoud van energie en impuls.

2.14.2 Tweede Poging

Er bestaat een tensor die nauw verwant is aan de Ricci-tensor en die geschikt is als linkerkant van de Einstein-veldvergelijkingen: de **Einstein-tensor**. Deze wordt gedefinieerd als:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}$$

Hierbij $R = R_a^a$ de **Ricci-scalar**, oftewel de scalaire kromming.

Deze tensor voldoet alvast aan meerdere vereisten:

- Hij is **symmetrisch**, zoals vereist door de symmetrie van $T^{\mu\nu}$;
- Hij is van **rang 2**;
- Hij beschrijft de **ruimtetijd kromming**, aangezien hij direct is opgebouwd uit de Ricci-tensor en dus indirect uit de Riemann-tensor.

Wat nog aangetoond moet worden, is dat de **covariante divergentie** van de Einstein-tensor nul is:

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0$$

Dit is essentieel, want alleen dan kan hij op consistente wijze worden gekoppeld aan de energie-impuls-tensor $T^{\mu\nu}$, waarvoor eveneens geldt $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ (zie hoofdstuk 2.13.2). (zie ook hoofdstuk [2.5.2](#), vergelijking [15](#)).

We leiden dit resultaat af met behulp van de **Bianchi-identiteit**, die luidt:

$$\nabla_\sigma R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0$$

We vermenigvuldigen deze identiteit met de metriektermen $g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}$. Omdat de afgeleiden van de metriek in een lokaal inertiaal stelsel nul zijn, mogen deze factoren naar binnen worden verplaatst:

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}) + \nabla_\nu (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\sigma\mu}) + \nabla_\mu (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\nu\sigma}) &= 0 \\ \nabla_\sigma (g^{\gamma\sigma} R) + \nabla_\nu (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\sigma\mu}) + \nabla_\mu (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\nu\sigma}) &= 0 \\ \nabla_\sigma (g^{\gamma\sigma} R) + \nabla_\nu (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\sigma\mu\alpha\beta}) + \nabla_\mu (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\nu\sigma\alpha\beta}) &= 0 \\ \nabla_\sigma (g^{\gamma\sigma} R) - \nabla_\nu (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\mu\sigma\alpha\beta}) - \nabla_\mu (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\nu\sigma\beta\alpha}) &= 0 \end{aligned}$$

Door gebruik te maken van de definitie van de Ricci-tensor $R^{\mu\nu} = g^{\mu\beta} g^{\nu\sigma} R_{\beta\sigma}$ (stap 3) en door de indices te hernoemen (stap 4), krijgen we:

$$\nabla_{\sigma}(g^{\gamma\sigma} R) - \nabla_{\nu}(g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\mu\sigma\alpha\beta}) - \nabla_{\mu}(g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\nu\sigma\beta\alpha}) = 0$$

$$\nabla_{\sigma}(g^{\gamma\sigma} R) - \nabla_{\nu}(g^{\gamma\sigma} g^{\beta\nu} R_{\sigma\beta}) - \nabla_{\mu}(g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} R_{\sigma\alpha}) = 0$$

$$\nabla_{\sigma}(g^{\gamma\sigma} R) - \nabla_{\nu}(R^{\gamma\nu}) - \nabla_{\mu}(R^{\gamma\mu}) = 0$$

$$\nabla_{\sigma}(g^{\gamma\sigma} R) - \nabla_{\sigma}(R^{\gamma\sigma}) - \nabla_{\sigma}(R^{\gamma\sigma}) = 0$$

$$\nabla_{\sigma}(g^{\gamma\sigma} R) - 2\nabla_{\sigma}(R^{\gamma\sigma}) = 0$$

$$\nabla_{\sigma}(2R^{\gamma\sigma} - g^{\gamma\sigma} R) = 0$$

Of herschreven:

$$\nabla_{\sigma}\left(R^{\gamma\sigma} - \frac{1}{2}g^{\gamma\sigma} R\right) = 0$$

En dus:

$$\nabla_{\nu} G^{\mu\nu} = 0$$

Conclusie:

De Einstein-tensor $G^{\mu\nu}$ is de juiste keuze voor de linkerkant van de veldvergelijking. Hij is symmetrisch, opgebouwd uit de ruimtetijd kromming, en voldoet aan het behoud van energie en impuls door zijn nuldivergentie. Daarmee is de vergelijking:

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$

een solide kandidaat voor de algemene relativistische generalisatie van de zwaartekrachtswetten.

2.15 Einstein-Veldvergelijkingen

In de vorige twee hoofdstukken hebben we de twee grootheden afgeleid die de kern vormen van de veldvergelijkingen in de algemene relativiteitstheorie:

- De **Einstein-tensor** $G^{\mu\nu}$, die de ruimtetijd kromming beschrijft, en
- De **energie-impuls-tensor** $T^{\mu\nu}$, die de materie-energie-inhoud van de ruimte-tijd representeert.

Deze twee grootheden zijn gekoppeld in de vorm:

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$

waarbij κ een nog te bepalen constante is.

Doel: herstel van Newton in de zwakveldlimiet

Om de waarde van κ te vinden, eisen we dat deze vergelijking in de **Newtoniaanse limiet** (zwakke, statische velden en lage snelheden) reduceert tot de klassieke zwaartekrachtwet van Newton. Dit zorgt ervoor dat de algemene relativiteitstheorie in overeenstemming is met de klassieke theorieën in hun toepassingsgebied.

Alternatieve formulering van de veldvergelijking

Einstein heeft de veldvergelijkingen ook in een alternatieve, equivalent vorm geschreven. Deze luidt:

$$G_{im} = -\chi \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right), \quad (2a)$$

waarbij:

- χ een constante is (verwant aan κ),
- $T = T^\sigma_\sigma$ de **spoortensor** (trace) van $T_{\mu\nu}$ is, oftewel de contractie van de tensor,
- en de rechterkant als geheel weer een tensor van rang 2 vormt.

Deze formulering werd door Einstein gebruikt in zijn beroemde artikel “*Die Feldgleichungen der Gravitation*”, ingediend op 25 november 1915 bij de Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften. Daarin schrijft hij:

„Ist in dem betrachteten Raume ‘Materie’ vorhanden, so tritt deren Energietensor auf der rechten Seite von (2) [...] auf. Wir setzen

$$G_{im} = -\chi \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right)$$

T ist der Skalar des Energietensors der ‘Materie’, die rechte Seite von (2) ein Tensor.“

Samenvattend

De volledige vorm van de veldvergelijkingen van Einstein luidt dus:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

Of equivalent:

$$G_{\mu\nu} = -\chi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

In de volgende sectie zullen we de constante κ bepalen door de vergelijking toe te passen op het Newtoniaanse limiet. Dit zal ons toelaten om de verbinding te leggen met de klassieke zwaartekrachtwet en zo de algemene relativiteitstheorie in zijn definitieve vorm vast te leggen.

2.15.1 De Alternatieve Vorm van Einstein's Vergelijking

We vertrekken vanuit de standaardvorm van de veldvergelijking:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu}$$

Door beide zijden van deze vergelijking te vermenigvuldigen met $g_{\mu\nu}$, verkrijgen we:

$$g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} R = \kappa g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$$

Volgens de definities van contractie geldt:

$$g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = R \quad \text{en} \quad g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = T$$

Daarmee wordt de vergelijking:

$$R - \frac{1}{2} R \cdot g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \kappa T$$

Aangezien $g^{\mu\nu}$ de inverse is van $g_{\mu\nu}$, is hun product de Kronecker-delta δ^μ_ν . Door deze tensor te contracteren (d.w.z. de som over de diagonale elementen te nemen), krijgen we:

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta^\nu_\nu = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

De vergelijking reduceert dan tot:

$$R - \frac{1}{2} R \times 4 = \kappa T$$

$$R - 2R = \kappa T$$

$$R = -\kappa T$$

We kunnen deze uitdrukking voor R nu invullen in de oorspronkelijke Einsteinvergelijking:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \times (-\kappa T) = \kappa T^{\mu\nu}$$

Wat leidt tot:

$$R^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \kappa g^{\mu\nu} T = \kappa T^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow R^{\mu\nu} = \kappa \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right)$$

We kunnen dit vervolgens herschrijven door beide zijden met $g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}$ te vermenigvuldigen:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} R^{\mu\nu} &= g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \kappa \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right) \\ \Rightarrow R_{\alpha\beta} &= \kappa \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right) \end{aligned}$$

Als we de indices vervangen door $\mu\nu$, krijgen we de alternatieve vorm:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \\ \Rightarrow R_{\mu\nu} &= \kappa T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \kappa g_{\mu\nu} T \end{aligned}$$

Gezien eerder $R = -\kappa T$, kunnen we dit ook schrijven als:

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

Wat resulteert in:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$$

Conclusie

Deze afleiding bevestigt de consistentie van Einstein's veldvergelijking en zijn equivalentie met de alternatieve formulering die in zijn originele publicatie werd voorgesteld. Beide vormen leiden tot dezelfde fysische voorspellingen, maar de alternatieve notatie wordt vaak gebruikt vanwege haar symmetrie en eenvoud in toepassingen.

2.15.2 Newtoniaanse Limiet

In het vorige hoofdstuk zagen we al dat in de limiet van zwakke velden en lage snelheden de R_{00} -component van de Riemann-tensor benaderd kan worden als:

$$R_{00} \approx \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi$$

Bovendien geldt dat wanneer de metriek $g_{\mu\nu}$ gereduceerd wordt tot de Minkowski-metriek $\eta_{\mu\nu}$ van vlakke ruimtetijd, we de Ricci-tensorcomponent als volgt kunnen benaderen:

$$R^{\mu\nu} \equiv g^{0\mu} g^{0\nu} R_{\mu\nu} \approx \eta^{0\mu} \eta^{0\nu} R_{\mu\nu} = (-1)(-1)R_{00} = R_{00}$$

Gecombineerd geeft dit:

$$R_{00} \approx \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi = \frac{4\pi G \rho}{c^2}$$

In deze Newtoniaanse limiet is de enige niet-verwaarloosbare component van de energie-impuls-tensor $T^{\mu\nu}$ de component $T^{00} = \rho c^2$. Dit volgt uit de uitdrukking:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \quad \text{met} \quad u^i \ll u^0 = c$$

We kunnen dan de getraceerde tensor benaderen als:

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \approx g_{00} T^{00} \approx \eta_{00} T^{00} = T^{00} = \rho c^2$$

We passen nu de 00-component van de Einstein-vergelijking toe:

$$R_{00} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} T \right)$$

Invullen geeft:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi G \rho}{c^2} &= \kappa \left(\rho c^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \rho c^2 \right) \\ \Rightarrow \frac{4\pi G \rho}{c^2} &= \frac{1}{2} \kappa \rho c^2 \end{aligned}$$

Daaruit volgt:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

We kunnen nu de Einstein-veldvergelijkingen formuleren in hun standaard- en alternatieve vormen:

$$\boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}}$$

Of:

$$\boxed{R^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right)}$$

En in verlaagde indexnotatie:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Of:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

Opmerking 1:

De constante $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ heeft een extreem kleine waarde:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \approx 2.071 \times 10^{-43} s^2 m^{-1} kg^{-1}$$

Dit betekent dat de ruimtetijd buitengewoon 'stijf' is: slechts enorme hoeveelheden massa of energie veroorzaken merkbare kromming.

Opmerking 2:

Ondanks het relatief eenvoudige uiterlijk van de Einsteinvergelijkingen, zijn ze in werkelijkheid uiterst complex. Voor een gegeven verdeling van materie en energie (in de vorm van $T^{\mu\nu}$, vormen de vergelijkingen een systeem van tien gekoppelde, niet-lineaire, tweede-orde partiële differentiaalvergelijkingen voor de metriek $g^{\mu\nu}$. Deze tien vergelijkingen corresponderen met de tien onafhankelijke componenten van de symmetrische metriek.

Opmerking 3:

De niet-lineariteit van de Einsteinvergelijkingen heeft een diepe fysische betekenis. Ze reflecteert het zelf-referentiële karakter van de zwaartekracht: de ruimtetijd beïnvloedt materie en energie, maar wordt tegelijk ook beïnvloed door diezelfde materie en energie. Zoals Kevin Brown opmerkt in *Reflection on Relativity*:

"De zelf-referentiële aard van de metrische veldvergelijkingen komt ook tot uiting in hun niet-lineariteit. Dit is onvermijdelijk voor een theorie waarin de metrische relaties tussen entiteiten hun 'posities' bepalen, en die posities op hun beurt de metriek beïnvloeden."

De niet-lineariteit impliceert ook de mogelijkheid van interactie tussen zwaartekrachtvelden zelf (zoals via graviton-uitwisseling), wat bijvoorbeeld in het lineaire Maxwell-formalisme van elektromagnetisme niet mogelijk is voor fotonen.

Opmerking 4:

De Einsteinvergelijkingen leggen slechts zes onafhankelijke beperkingen op aan de tien componenten van de metriek $g^{\mu\nu}$. De resterende vier vrijheidsgraden hangen samen met de vrijheid om coördinaten te kiezen: men kan vier willekeurige functies specificeren via de coördinaten $x^\alpha(P)$. Deze overbepaling is een direct gevolg van het feit dat de Einstein-tensor $G^{\mu\nu}$ een nulpuntdivergentie heeft: $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$.

2.16 Samenvatting van de Eindformule voor de Algemene Relativiteitstheorie

In de voorgaande hoofdstukken hebben we stap voor stap de afleiding van de Einstein-veldvergelijkingen (EVV) besproken. Daarbij kwamen alle noodzakelijke bouwstenen aan bod, zoals de Riemann-tensor, de Ricci-tensor, de Ricci-scalar, de energie-impuls-tensor, en het gebruik van covariante afgeleiden. In dit afsluitende hoofdstuk vatten we het eindresultaat samen en lichten we de fysische betekenis ervan toe.

Het fundamentele inzicht van Einstein

Einstein's centrale idee was dat zwaartekracht géén kracht is in de klassieke zin, maar het gevolg van de kromming van ruimtetijd. Deze kromming wordt veroorzaakt door de aanwezigheid van massa en energie. Zijn doel was een wiskundige formule te vinden die deze relatie beschrijft: hoe massa en energie de geometrie van ruimtetijd beïnvloeden.

De algemene vorm van de veldvergelijking

Zonder de volledige afleiding opnieuw te doorlopen, presenteren we hier het eindresultaat van Einstein's theorie:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (4)$$

De term $\lambda g_{\mu\nu}$ bevat de zogenaamde **kosmologische constante** ($\lambda = 1.1056 \times 10^{-52} m^{-2}$), die pas bij kosmologische schalen merkbaar wordt. Voor de meeste toepassingen in de astrofysica en klassieke relativiteit kunnen we deze term negeren, zodat de vergelijking vereenvoudigt tot:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (5)$$

De **linkerkant** van deze vergelijking beschrijft de geometrie (de kromming) van ruimtetijd, terwijl de **rechterkant** de inhoud van de ruimte (massa, energie en impuls) representeert.

In deze vergelijking staat c voor de lichtsnelheid (2.99792458×10^8 m/s) en G is de bekende zwaartekrachtsconstante $6.674 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$.

Vacuüm: buiten een massa

In een gebied zonder massa of energie geldt $T_{\mu\nu} = 0$. De veldvergelijking reduceert dan tot:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (6)$$

Zoals besproken in hoofdstuk [2.15.1](#) De Alternatieve Vorm van Einstein's Vergelijking geldt in dat geval bovendien:

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4} T = 0 \implies R = 0$$

Zodat overblijft:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (7)$$

Dit zijn de zogenaamde vacuümvergelijkingen van Einstein.

Uitleg van de gebruikte objecten

De indexen μ en ν lopen van 0 tot 3 en verwijzen naar de vier dimensies van de ruimtetijd: tijd (0) en ruimte (1 = x, 2 = y, 3 = z).

Vergelijking (5) bevat dus 16 componentvergelijkingen:

$$\begin{aligned}
 R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}, & R_{01} - \frac{1}{2} g_{01} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{01}, & R_{02} - \frac{1}{2} g_{02} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{02}, & R_{03} - \frac{1}{2} g_{03} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{03} \\
 R_{10} - \frac{1}{2} g_{10} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{10}, & R_{11} - \frac{1}{2} g_{11} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{11}, & R_{12} - \frac{1}{2} g_{12} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{12}, & R_{13} - \frac{1}{2} g_{13} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{13} \\
 R_{20} - \frac{1}{2} g_{20} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{20}, & R_{21} - \frac{1}{2} g_{21} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{21}, & R_{22} - \frac{1}{2} g_{22} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{22}, & R_{23} - \frac{1}{2} g_{23} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{23} \\
 R_{30} - \frac{1}{2} g_{30} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{30}, & R_{31} - \frac{1}{2} g_{31} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{31}, & R_{32} - \frac{1}{2} g_{32} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{32}, & R_{33} - \frac{1}{2} g_{33} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{33}
 \end{aligned}$$

Door symmetrie (namelijk $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$) zijn er slechts 10 onafhankelijk.

De Ricci-tensor $R_{\mu\nu}$ wordt vaak in matrixvorm genoteerd als:

$$R_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{02} & R_{03} \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{30} & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$$

De **metrische tensor** $g_{\mu\nu}$, die de meetkundige structuur van ruimtetijd bevat, heeft eveneens 10 onafhankelijke componenten en bepaalt de ruimtetijdgeometrie volledig:

$$g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

De Ricci-scalar R volgt uit de contractie van de Ricci-tensor met de inverse metriek:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Alle elementen aan de linkerkant van vergelijking (5) beschrijven de geografie van de beschouwde ruimtetijd. Aan de rechterkant vinden we de **energie-impuls-tensor** $T_{\mu\nu}$, die bevat alle informatie over materie en energie in het systeem:

$$T_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$$

Hierin staat T_{00} voor de energiedichtheid, T_{0i} voor de energiestroom en T_{ij} voor de impulsvloei en drukcomponenten.

Bepaling van $R_{\mu\nu}$

De Ricci-tensor wordt berekend via contractie van de Riemann-tensor:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} \quad (\text{opmerking 1})$$

Deze tensor hangt af van de **Christoffel-symbolen**, die zelf uit afgeleiden van de metriek bestaan::

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\} \quad (\text{opmerking 1})$$

Hieruit blijkt dat de volledige geometrie (en dus ook de zwaartekracht) afhangt van de metriek $g_{\mu\nu}$ en haar afgeleiden.

De Schwarzschild-oplossing

In 1915 vond Karl Schwarzschild een exacte oplossing van de veldvergelijkingen in vacuüm rondom een bolsymmetrische massa. Dit leidde tot de bekende **Schwarzschild-metriek** (zie hoofdstuk [2.17](#)):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2$$

Deze metriek geldt buiten de massa, dus in een gebied waar $T_{\mu\nu} = 0$ en dus:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

De Schwarzschild-oplossing is bijzonder belangrijk omdat zij experimenteel verifieerbare voorspellingen doet, zoals de ombuiging van licht en de perihelium-precessie van Mercurius.

De metrische tensor bestaat dan uit de elementen:

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right), \quad g_{11} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta^2$$

Dit is het zogenaamde *spoor* van de tensor. Of in tensorvorm:

$$g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix}$$

Dus omdat de Schwarzschild-vergelijking buiten een massa wordt gebruikt, wordt de rechterkant van de Einstein-veldvergelijkingen nul ($T_{\mu\nu} = 0$). Hierdoor gaan de veldvergelijkingen dan over in vergelijking (6), en omdat R is afgeleid van $R_{\mu\nu}$, kan vergelijking (6) alleen nul zijn wanneer $R_{\mu\nu} = 0$. Dus de enige relevante vergelijking is $R_{\mu\nu} = 0$. Zoals eerder vermeld, is de tensor $R_{\mu\nu}$ opgebouwd uit Christoffel-symbolen en hun afgeleiden. Alle relevante Christoffel-symbolen voor deze metriek hebben we afgeleid en samengevat in [Appendix 1.2](#).

De Schwarzschild-vergelijking gebruikt het polaire of sferische coördinatenstelsel om de volledige ruimte-tijd te beschrijven; echter, door behoud van impulsmoment vindt fysieke beweging plaats in één vlak. Door het juiste polaire coördinatenstelsel te kiezen, kan dit vlak zo worden gedraaid dat het equatoriale vlak samenvalt met het onderzochte oppervlak. In dat geval wordt de hoek $\theta = \pi/2$, waarbij de metrische tensor verder vereenvoudigd tot:

$$g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \end{vmatrix}$$

(Zie ook hoofdstuk [7.3 "Antwoord op vragen betreffende Schwarzschild"](#))

Opmerking 1

In zijn document gebruikt Einstein voor het Christoffel-symbool $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ een tegenovergesteld teken, en ook de Ricci-tensor $R_{\mu\nu}$ heeft een tegenovergesteld teken voor de derde en vierde term aan de rechterkant van de vergelijking. Voor de metriek hebben wij de zogenaamde (+ - -) notatie gebruikt, ook wel bekend als de West Coast-conventie.

Slotopmerking

De Einstein-vergelijkingen vormen een krachtig systeem van 10 gekoppelde, niet-lineaire, partiële differentiaalvergelijkingen. Hoewel ze compact kunnen worden geschreven, zijn ze inhoudelijk rijk en complex. Zoals vaak gezegd:

"Massa en energie bepalen de kromming van ruimtetijd, en de kromming van ruimtetijd bepaalt de beweging van massa en energie."

2.17 Schwarzschild-Metriek

Het werken met de Einstein-veldvergelijkingen is in het algemeen vrij complex vanwege hun algemene en tensoriële aard. Gelukkig vond Karl Schwarzschild in 1915 een exacte oplossing voor deze vergelijkingen in een specifiek geval: dat van een sferisch symmetrisch zwaartekrachtsveld in vacuüm. (Zie hoofdstuk 5 : [Controle of de Schwarzschild Metriek voldoet aan de Einstein Veldvergelijkingen](#))

Einstein beschouwde in zijn theorie alle mogelijke verdelingen van massa en energie. Schwarzschild beperkte zich daarentegen tot de situatie in het vacuüm, dat wil zeggen: buiten de materie, waar de energie-impulstensor nul is ($T_{\mu\nu} = 0$). Hij onderzocht het effect van een centrale, sferisch symmetrische massa op de omringende ruimte-tijd – bijvoorbeeld de invloed van de zon op passerende planeten of lichtstralen. (Voor een uitgebreider overzicht, zie hoofdstuk 4.10 en de [Schwarzschild's: "On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory"](#).)

De door Schwarzschild gevonden metriek luidt:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (8)$$

Deze metriek beschrijft de afstand tussen twee gebeurtenissen in een sferisch symmetrisch zwaartekrachtsveld in termen van de tijdcoördinaat t , de radiale afstand r , en de hoeken θ en ϕ . In een oneindig klein lokaal gebied kan men een lokaal inertiaalstelsel construeren waarin de coördinaten cdt , dr , $d\theta$ en $d\phi$ zich gedragen als lineaire, orthogonale grootheden. De metrische coëfficiënten zijn in zo'n lokaal vlak constant, maar variëren in het algemeen met r en θ .

Voor verdere beschouwingen over deze oplossing zie het volgende hoofdstuk.

Voor de volledige oorspronkelijke afleiding van de Schwarzschild-metriek: zie *Schwarzschild, On the Gravitational Field of a Point-Mass, According to Einstein's Theory*, 13 januari 1916, en het overzichtsartikel van Oas.

2.17.1 Besprekingen over de Schwarzschild-Metriek

Inleiding

De Schwarzschild-metriek is een exacte oplossing van de Einstein-veldvergelijkingen voor het geval van een sferisch symmetrische massa in vacuüm. Karl Schwarzschild publiceerde deze oplossing in 1915, kort na de formulering van de algemene relativiteitstheorie door Albert Einstein. Deze oplossing vormt een van de belangrijkste toepassingen van de theorie en beschrijft hoe massa de structuur van de ruimte-tijd beïnvloedt.

De Schwarzschild-metrick in polaire coördinaten

De Schwarzschild-vergelijking in polaire coördinaten luidt:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (1)$$

Hierin zijn:

- G de gravitatieconstante,
- M de massa,
- c de lichtsnelheid,
- t, r, θ, ϕ de tijd- en ruimtecoördinaten.

Deze metrick beschrijft de gekromde ruimte-tijd buiten een bolsymmetrische massa, waarbij aangenomen wordt dat er geen andere materie aanwezig is (vacuüm).

Dimensie-analyse

Op het eerste gezicht lijkt het alsof de dimensies van deze vergelijking niet kloppen. In werkelijkheid zijn de coëfficiënten dimensieloos, terwijl de coördinaten een lengte-afmeting hebben (in meter of m^2 voor het kwadraat). De betekenis van formule (1) is dus dat:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) d(c^2 t^2) - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - \frac{r^2}{R_p^2} d(R_p^2 \cdot \theta^2) - \frac{r^2}{R_p^2} \sin^2 \theta^2 d(R_p^2 \cdot \phi^2)$$

met $R_p = 1$ meter. Hiermee wordt duidelijk dat de coördinaten r, θ, ϕ dimensioneel als lengtes behandeld worden, terwijl de bijhorende coëfficiënten dimensieloos blijven.

Om praktische redenen wordt meestal gewerkt met de oorspronkelijke vorm van vergelijking (1), maar het is belangrijk te beseffen dat $d\theta$ en $d\phi$ hier een lengte-dimensie krijgen via vermenigvuldiging met R_p .

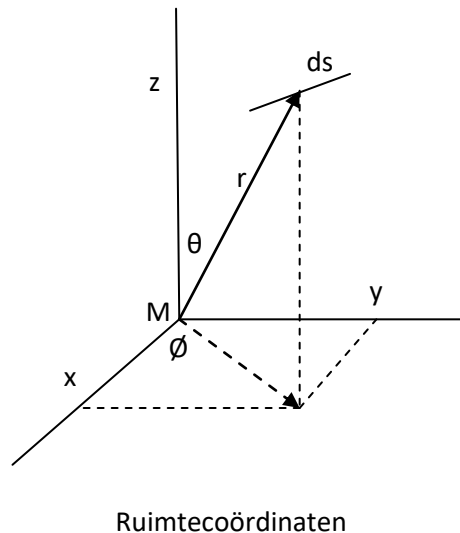
Fysische interpretatie van de Schwarzschild-metrick

Laten we nu bekijken wat formule (1) fysisch betekent. Stel dat zich in de ruimte een object bevindt met massa M , dat we beschouwen als een puntmassa. In de klassieke Newtoniaanse mechanica veroorzaakt zo'n massa een zwaartekrachtsveld — een kracht die werkt op andere massa's in de buurt.

In de algemene relativiteitstheorie is dit idee fundamenteel anders: volgens Einstein en Schwarzschild genereert de massa M geen kracht, maar vervormt ze de structuur van de ruimtetijd. Er is dus geen sprake meer van een kracht in de klassieke zin, maar van een geometrisch effect.

We kiezen een coördinatenstelsel waarin M zich in het middelpunt bevindt. Wanneer een testdeeltje (met verwaarloosbare massa) zich in rust bevindt ten opzichte van deze massa, ondervindt het in Newtoniaanse zin een zwaartekracht. Laat men dit deeltje los, dan zou het versnellen richting M , net zoals Newton voorspelt.

Toch voelt het deeltje zelf geen kracht. In zijn eigen (meebewegend) referentiekader ervaart het niets bijzonders — het volgt gewoon het natuurlijke pad dat de ruimtetijd zelf voorschrijft. In Einsteins theorie is dit pad geen rechte lijn, maar een geodeet: de kortste of ‘rechtste’ weg in een gekromde ruimtetijd.



Het gekozen coördinatenstelsel en de lokale structuur van de ruimte

We werken hier met een Euclidisch coördinatenstelsel, dat kan worden opgevat als een Cartesisch systeem (t, x, y, z) of — zoals in de Schwarzschild-oplossing — een polair systeem (t, r, θ, ϕ) . In het polaire geval hangt het pad dat een deeltje volgt af van alle vier de coördinaten. De Schwarzschild-metrik schrijft aan elke differentiaal een coëfficiënt toe, die een functie is van r en θ , maar onafhankelijk is van t en ϕ . Dit weerspiegelt de sferische symmetrie rond de massa M : een rotatie om het centrum verandert niets aan de fysische situatie.

Belangrijk om te beseffen is dat deze coördinaten hypothetisch zijn: ze worden gedefinieerd alsof ze zich in een vlakke, niet-gekromde ruimtetijd bevinden. Schwarzschild vond een expliciete formule die de ruimtetijd-kromming rond een puntmassa beschrijft. Deze formule relateert het elementaire lijnstuk ds (de afstand in ruimte-tijd tussen twee naburige gebeurtenissen) aan het gekozen coördinatenstelsel.

Hoewel de ruimtetijd gekromd is, kunnen we deze lokaal — in een infinitesimaal klein gebied — beschouwen als vlak. Binnen zo’n klein gebied mogen we de coördinaten cdt , dr , $d\theta$ en $d\phi$, behandelen als zijnde onderling loodrecht en rechtlijnig. De coëfficiënten in de metrik kunnen daar als constant worden beschouwd.

Verplaatsen we ons naar een andere locatie, dan blijven deze eigenschappen lokaal geldig, maar met gewijzigde coëfficiënten als gevolg van veranderingen in r en θ .

Door vervolgens over ds te integreren langs een pad — dat wil zeggen, over alle infinitesimale stapjes samen — verkrijgen we het volledige traject van het deeltje in de gekromde ruimtetijd.

De Schwarzschild-metrik en de rol van eigen tijd

Zoals eerder besproken, heeft de Schwarzschild-metrik in polaire coördinaten de vorm:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1)$$

Hierin beschrijft ds^2 het vierkante interval in de ruimtetijd tussen twee naburige gebeurtenissen.

Voor meer compactheid introduceren we de functie:

$$\text{Waarbij: } \sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$$

waardoor de metrik elegant herschreven kan worden als:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1a)$$

Hierbij is $d\tau$ de **eigen tijd**: de tijd die gemeten wordt door een klok die met het object meebeweegt. Dit is de werkelijke tijdsduur die een waarnemer langs zijn eigen wereldlijn ervaart.

De coördinatentijd dt daarentegen behoort tot een hypothetisch stelsel waarin zich geen massa bevindt — een ideaal "vlak" referentiekader. Strikt genomen is dt niet direct meetbaar, behalve in de limiet $r \rightarrow \infty$, waar $\sigma \rightarrow 1$ en de ruimtetijd vlak wordt.

Lokaal, op een vaste waarde van r , relateert de Schwarzschild-metrik de coördinatentijd en eigen tijd via een eenvoudige relatie:

$$\Delta t_{\text{coördinaat}} = \sigma dt$$

waarin σ afhankelijk is van de positie r .

Afgelede afstand, snelheid en het verband met de Schwarzschild-metrik

In de Schwarzschild-ruimte-tijd wordt de infinitesimale ruimtelijke afstand $\Delta\text{afstand}$ tussen twee gebeurtenissen gegeven door:

$$\Delta\text{afstand} = \sqrt{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}$$

Waarbij, zoals eerder vermeld:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$$

De bijbehorende tijdsduur in coördinatentijd is:

$$\Delta t_{\text{tijd}} = \sigma dt$$

Daaruit volgt voor de (plaatselijke) snelheid v van een deeltje in het frame:

$$v^2/c^2 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\Delta \text{afstand}}{\Delta t_{\text{tijd}}} \right)^2 = \frac{(\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2)}{\sigma^2 c^2 dt^2}$$

Hierbij wordt dus rekening gehouden met de kromming van de ruimtetijd.

Substitueren we deze uitdrukking terug in de compacte vorm van de Schwarzschild-metrick (vergelijking (1a)), dan vinden we:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2}{\sigma^2 c^2 dt^2} \sigma^2 c^2 dt^2 \quad (2)$$

wat vereenvoudigt tot:

$$c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 \left(1 - \frac{\sigma^{-4}}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{\sigma^{-2} r^2}{c^2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{\sigma^{-2} r^2 \sin^2 \theta^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right) = \sigma^2 c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (3)$$

of nog compacter geschreven:

$$c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

waarbij:

$$v^2 = \sigma^{-4} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \sigma^{-2} r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sigma^{-2} r^2 \sin^2 \theta^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \quad (3a)$$

Deze afleiding laat zien hoe zowel de ruimtelijke als de temporele kromming samen de dynamiek van een bewegend deeltje bepalen.

Verband tussen eigen tijd en coördinaten dt

Uit de vorige afleiding (vergelijking (3)) volgt direct de relatie tussen de eigen tijd $d\tau$ en de coördinatentijd dt :

$$d\tau = \frac{\sigma}{\gamma} dt$$

Waarbij:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4)$$

Hierbij is σ een maat voor de zwaartekrachtsvertraging (door de massa M) en γ de Lorentzfactor, afkomstig uit de speciale relativiteitstheorie.

Omdat $\gamma \geq 1$ (immers, $v \leq c$ en $\sigma \leq 1$ (want $r \geq 2GM/c^2$), volgt hieruit:

$$d\tau \leq dt \quad (5)$$

Dit betekent dat de eigen tijd van het bewegende object altijd langzamer verloopt dan de coördinatentijd in het referentiekader.

Aangezien zowel σ als γ constant zijn tijdens het beschouwde interval (ze zijn slechts functie van r en v , niet van t), kunnen we deze relatie eenvoudig integreren:

$$\tau = \frac{\sigma}{\gamma} t \quad (5a)$$

waarbij τ de verstreken eigen tijd is en t de verstreken coördinatentijd.

Gedrag van een foton in de Schwarzschild-ruimte

Voor een foton geldt dat de eigen tijd $d\tau$ nul is, omdat een foton altijd met de lichtsnelheid beweegt:

$$0 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (6)$$

Hieruit volgt dat de ruimtelijke afstand die het foton aflegt wordt gegeven door:

$$(\Delta \text{afstand})^2 = \sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (6b)$$

De effectieve lichtsnelheid v ten opzichte van het gekozen coördinatensysteem kunnen we nu bepalen:

$$c^2 = \left(\frac{\Delta \text{afstand}}{\Delta \text{tijd}} \right)^2 = \frac{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2}{\sigma^2 dt^2} = v^2 \quad (6c)$$

Hierbij is $\Delta \text{tijd} = \sigma dt$, zoals eerder besproken.

Interpretatie:

- In de teller vinden we de 'normale' ruimtelijke afstand die het foton aflegt.
- In de noemer zien we dat de tijd door een factor σ wordt beïnvloed: de klok op een gegeven locatie tikt trager vanwege de zwaartekrachtsinvloed.

Hieruit blijkt dat, gemeten in de coördinatentijd dt , de lichtsnelheid effectief **lager** is dan c in de aanwezigheid van zwaartekracht.

In het lokale (meebewegende) frame beweegt het foton natuurlijk nog steeds met de constante snelheid c .

Alternatieve beschrijving van de fotonbeweging

We kunnen de relatie tussen afgelegde afstand en verstreken tijd ook anders herschrijven:

$$c^2 = \left(\frac{\Delta \text{afstand}}{\Delta \text{tijd}} \right)^2 = \frac{\sigma^{-2}(\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2)}{dt^2} \quad (6d)$$

Hierbij merken we op:

- De ruimtelijke afstand wordt vergroot met een factor σ^{-2} (aangezien $\sigma \leq 1$).
- Tegelijkertijd blijft de coördinatentijd dt onveranderd.

Gevolg:

Door deze vergrote afstand in de teller, maar een onveranderde tijd in de noemer, lijkt de lichtsnelheid in het coördinatenstelsel **kleiner** dan de universele lichtsnelheid c .

Samenvattend beeld:

Vanuit het standpunt van het 'universele' coördinatenstelsel:

- Een foton beweegt **langs een kromme** in de gekromde ruimtetijd, en
- De effectieve snelheid van het foton tussen twee coördinatiepunten (bijvoorbeeld van A naar B) is **kleiner dan c** .

In vergelijking:

$$\sigma^2 c^2 = \frac{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2}{dt^2} \quad (6e)$$

is te zien dat de lichtsnelheid effectief wordt gemodificeerd door de factor σ^2 .

Gedrag

Dit betekent fysisch dat:

- De eigen snelheid van het foton blijft c langs zijn wereldlijn.
- Maar de projectie van zijn beweging op het coördinatenstelsel ziet eruit als een lagere snelheid vanwege de kromming van de ruimtetijd.

Met andere woorden:

$$v = \frac{\text{afstand}}{t} = \frac{\text{afstand}}{\text{padlengte}/c} = \frac{\text{afstand}}{\text{padlengte}} c$$

Omdat de padlengte groter is dan de 'rechte afstand', is $v < c$ als gemeten in coördinatentijd.

Relatie tussen lokale tijd op Aarde en de universele frametijd

Zoals eerder opgemerkt, is de coördinatentijd dt een hypothetische tijd, gedefinieerd in een massaloze omgeving of op oneindige afstand ($r = \infty$). Aangezien we onze metingen uitvoeren vanaf de Aarde, moeten we een verband leggen tussen (zie ook [hoofdstuk 3.4](#)):

- de **eigen tijd** $d\tau_{aarde}$ zoals gemeten door een klok op Aarde, en
- de **coördinatentijd** dt uit het universele referentiekader.

Zoals eerder afgeleid (zie ook formule (5a)), geldt:

$$d\tau_{aarde} = \frac{\sigma_{aarde}}{\gamma_{aarde}} dt$$

Of, omgekeerd:

$$dt = \frac{\gamma_{aarde}}{\sigma_{aarde}} d\tau_{aarde}$$

waarbij:

- $\sigma_{aarde} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_{aarde}}}$ de gravitationele tijdsdilatatiefactor is,
- $\gamma_{aarde} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{aarde}^2}{c^2}}}$ de speciale relativistische Lorentzfactor is (wegens de rotatie van de Aarde).

Interpretatie:

De tijd op Aarde vertraagt dus relatief gezien vanwege twee effecten:

1. de **zwaartekracht** (gravitational time dilation, via σ),
2. de **beweging** van de Aarde (speciale relativiteit, via γ).

Voor een waarnemer die meebeweegt met de Aarde blijft zijn eigen tijd $d\tau_{aarde}$ natuurlijk normaal verlopen — elke seconde blijft een seconde.

Echter, ten opzichte van de universele frametijd dt lopen de lokale seconden **iets trager**.

Samenvatting:

- **Op Aarde:** eigen klok verloopt normaal (d.w.z. volgens $d\tau = dt$).
- **Ten opzichte van het universele frame:** eigen klok loopt vertraagd door zwaartekrachts- en bewegingsinvloeden.

Gedrag van een foton in de Schwarzschild-metrik

Een bijzonder geval treedt op wanneer we een **foton** beschouwen. Omdat een foton zich altijd met de lichtsnelheid c voortbeweegt en **geen rustmassa** heeft, is de eigen tijd $d\tau$ langs zijn wereldlijn gelijk aan nul:

$$d\tau = 0$$

Dit volgt ook direct uit de Schwarzschild-metrik:

$$0 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (6)$$

Hieruit kunnen we afleiden dat de ruimte-afgelegde afstand $\Delta\text{afstand}$ is:

$$(\Delta\text{afstand})^2 = \sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (6b)$$

en de snelheid van het foton is:

$$c^2 = \left(\frac{\Delta\text{afstand}}{\Delta\text{tijd}} \right)^2 = \frac{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}{\sigma^2 dt^2} \quad (6c)$$

Opmerking:

Hoewel een foton in zijn eigen (niet bestaande) rustframe een "afstand nul" zou hebben, ziet een externe waarnemer wél een afgelegde afstand over een krom pad in de ruimtetijd.

Speciale gevallen:

1. Radiale beweging van het foton (alleen r -richting, $d\tau = d\theta = d\phi = 0$)

Dan vereenvoudigt de vorige vergelijking tot:

$$c^2 = \sigma^{-4} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$$

oftewel:

$$\sigma^4 c^2 dt^2 = dr^2 \quad \text{of} \quad \frac{\sigma^{-2} dr}{dt} = c \quad (7)$$

2. Cirkelbeweging in het equatoriale vlak ($\theta = \pi/2$)

Als het foton zich in een cirkelbaan rond de massa M bevindt (dus $d\tau = dr = d\theta = 0$), dan volgt:

$$v = c = \frac{r d\phi}{\sigma dt}$$

Hieruit blijkt dat de rotatiesnelheid $d\phi/dt$ afhankelijk is van de afstand r en de krommingsfactor σ .

Op grote afstand:

Als $r = \infty$, geldt:

$$\sigma \rightarrow 1$$

En dus:

$$d\tau = dt$$

De tijd gemeten langs het pad van het foton en de coördinatentijd vallen dan samen — precies zoals we verwachten in een gebied zonder zwaartekracht (vlakke ruimtetijd).

Samenvattend:

- Voor een foton geldt altijd $d\tau = 0$.
- De relatie tussen ruimte en tijd is volledig bepaald door de krommingsfactor σ .
- In sterk gekromde ruimtetijd (dicht bij massa) wijkt het gedrag van een foton significant af van wat we intuïtief verwachten in vlakke ruimtetijd.

In het algemeen is de beweging op oneindige afstand rechtlijnig en uniform, en zo wordt de vergelijking:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (8)$$

Transformatie naar Cartesiaanse Coördinaten

De oorspronkelijke benadering van Schwarzschild was niet in polaire, maar in **Cartesiaanse coördinaten**. Hoewel de Schwarzschild-oplossing meestal wordt gepresenteerd in bolcoördinaten (r, θ, ϕ) , kan deze ook worden uitgedrukt in termen van (x, y, z) .

De transformatie van de Schwarzschild-metrick naar Cartesiaanse coördinaten resulteert in:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2 r^2} (x dx + y dy + z dz)^2 \quad (9)$$

Waarbij:

- $\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ de gebruikelijke radiale afstand is.

Uitleg:

De eerste term $\sigma^2 c^2 dt^2$ beschrijft de tijdcomponent die afhankelijk is van de zwaartekracht. De tweede term $(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ komt overeen met de vlakke ruimtetijd (Euclidische afstand). De derde term corrigeert voor het feit dat de tijdsvertraging (en dus de kromming) ook ruimte-componenten beïnvloedt, afhankelijk van de richting waarin men beweegt ten opzichte van de massa M .

Opmerking over differentiëren naar t of τ

Bij gebruik van de Schwarzschild-metriek moet men alert zijn op de variabele ten opzichte waarvan men differentieert:

- **Tijd t** is de *coördinatentijd*, zoals gemeten door een waarnemer op oneindige afstand (of in een gebied zonder massa).
- **Tijd τ** is de *eigentijd*, zoals gemeten langs de wereldlijn van het bewegende object.

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1a)$$

In formulevorm (voor het vlak $\theta = \pi/2$):

$$1 = \sigma^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{cd\tau} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{cd\tau} \right)^2 \quad (10)$$

of, door om te schrijven met partiële afgeleiden naar t :

$$1 = \sigma^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{cdt} \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{cdt} \frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

Dan:

$$1 = \sigma^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{\sigma^4} \left(\frac{dr}{cdt} \right)^2 - \frac{r^2}{\sigma^2} \left(\frac{d\phi}{cdt} \right)^2 \right) \quad (11)$$

Hieruit volgt hoe beweging (snelheden) en tijdsvertragingen in gekromde ruimtetijd samenhangen.

Snelheid ten opzichte van lokale en universele tijd

De snelheid ten opzichte van de **eigentijd** τ is:

$$v_{co}^2 = \frac{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2}{d\tau^2}$$

en de Schwarzschild-metrickan kan in termen van v_{co} worden geschreven:

$$c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2}{d\tau^2} d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - v_{co}^2 d\tau^2$$

Of:

$$c^2 d\tau^2 + v_{co}^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2$$

Benadering voor kleine snelheden ($v_{co} \ll c$) via een Taylor-reeks:

$$d\tau^2 = \frac{\sigma^2}{1 + \left(\frac{v_{co}}{c}\right)^2} dt^2 \approx \sigma^2 \left(1 - \left(\frac{v_{co}}{c}\right)^2\right) dt^2$$

$$d\tau \approx \sigma \sqrt{1 - \left(\frac{v_{co}}{c}\right)^2} dt = d\tau = \frac{\sigma}{\gamma_{co}} dt$$

Met $\gamma_{co} = 1/\sqrt{1 - v_{co}^2/c^2}$.

Samenvatting

- Schwarzschild werkte oorspronkelijk in Cartesiaanse coördinaten.
- De Schwarzschild-metrickan kan worden herleid naar zowel bol- als Cartesiaanse vorm.
- Bij interpretaties van beweging (bijv. banen rond een massa) is het essentieel om goed onderscheid te maken tussen de coördinatentijd t en de eigentijd τ .
- Voor kleine snelheden is de invloed van de ruimtetijd kromming op de tijdsbeleving klein, maar meetbaar.

Over het algemeen speelt een traject zich af in één vlak. In dat geval kan het polaire systeem altijd zo worden gekozen dat het evenaarvlak samenvalt met het trajectvlak; in dat geval is $\theta = \pi/2$.

Als het traject een cirkel is, waarbij dus $\theta = \pi/2$ en waarbij de r constant is, dan is $dr = 0$ en wordt de vergelijking:

$$c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - r^2 d\phi^2$$

Aanvullende overpeinzingen:

Aanvulling 1: Interpretatie van ds als Lijnsegment in de Ruimtetijd

Misschien is het nuttig om ds te beschouwen als een oneindig klein lijnsegment in de ruimte-tijd, waarvan de lengte in meters kan worden gemeten door de reistijd van een foton over dat segment te vermenigvuldigen met de lichtsnelheid c .

Het lijnsegment ds bevindt zich in de oorsprong van zijn eigen meebewegend referentiekader. Binnen dat kader is tijd de enige fysische grootheid die direct kan worden gemeten. De afstand wordt gemeten via de reistijd van het foton.

Dus:

$$ds = c d\tau$$

waarbij $d\tau$ de eigen tijd is die op een meebewegende klok wordt geregistreerd.

Nu introduceren we een **tweede referentiekader**, bijvoorbeeld het Schwarzschild-kader, waarin zich een centrale massa M bevindt. In dit kader kunnen we de afstand tussen het lijnsegment en de oorsprong bepalen door gebruik te maken van externe meetinstrumenten (zoals lasers, staven, enzovoort).

Belangrijk:

De tijdsbepaling in dit externe kader is indirect: ze is afhankelijk van de relatie die wordt gegeven door de Schwarzschild-metrieke, en kan niet direct worden gemeten met een klok ter plaatse.

Volgens de Schwarzschild-metrieke geldt:

$$(c\Delta T)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 = c^2 d\tau^2 - (\Delta X)^2$$

Hieruit volgt:

$$c^2 dt^2 = \frac{(c\Delta T)^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}$$

De relatie tussen de theoretische tijd dt en de eigen tijd $d\tau$ kan alleen via deze formule worden bepaald.

Aanvulling 2: Wereldlijn van een Deeltje in een Meebewegend Referentiekader

Beschouwen we een deeltje in een meebewegend (lokaal) referentiekader, dan is het deeltje in rust ten opzichte van dat kader. Het enige pad dat het deeltje volgt in de ruimte-tijd is langs zijn eigen τ -as: de eigen tijd.

We kunnen echter de beweging van het deeltje beschrijven ten opzichte van een **extern** (mogelijk bewegend) referentiekader. In dat geval drukken we de positie van het deeltje uit in coördinaten (t, x, y, z) van dat andere kader.

De wereldlijn van het deeltje — het pad dat het deeltje volgt door de ruimte-tijd — is dan volledig een functie van τ :

$$(t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$$

De vier coördinaten zijn dus functies van de eigen tijd τ .

Voorbeeld: Tijdsverschil tussen de Polen en de Evenaar

We berekenen het tijdsverschil aan het aardoppervlak tussen de tijd bij de polen en aan de evenaar, veroorzaakt door relativistische effecten.

Uitgaande van de Schwarzschild-metrick:

$$c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2$$

Bij de Polen

Aan de polen geldt:

- $dr = 0$ (geen radiale beweging),
- $\theta = 0$,
- $d\theta = 0$,
- $\sin \theta = 0$.

Dan wordt de Schwarzschild-metrick:

$$c^2 d\tau_{polen}^2 = \sigma^2 c^2 dt^2$$

waaruit volgt:

$$d\tau_{polen} = \sigma dt$$

Bij de Evenaar

Aan de evenaar geldt:

- $dr = 0$,
- $\theta = \pi/2$,
- $d\theta = 0$,
- $\sin \theta = 1$

Dan wordt de metrick:

$$c^2 d\tau_{\text{evenaar}}^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - r^2 d\phi^2$$

waarbij $d\phi$ de draaiing om de rotatie-as van de Aarde beschrijft.

We herschrijven dit:

$$c^2 d\tau_{\text{evenaar}}^2 = c^2 d\tau_{\text{polen}}^2 - r^2 d\phi^2$$

Of:

$$c^2 d\tau_{\text{evenaar}}^2 = c^2 d\tau_{\text{polen}}^2 \left\{ 1 - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau_{\text{polen}}} \right)^2 \right\}$$

De draaisnelheid v_{evenaar} aan de evenaar is:

$$v_{\text{evenaar}} = r \frac{d\phi}{d\tau_{\text{polen}}}$$

Dus:

$$c^2 d\tau_{\text{evenaar}}^2 = c^2 d\tau_{\text{poles}}^2 \left\{ 1 - \frac{v_{\text{evenaar}}^2}{c^2} \right\}$$

$$d\tau_{\text{evenaar}} = d\tau_{\text{polen}} \sqrt{1 - \frac{v_{\text{evenaar}}^2}{c^2}}$$

Voor kleine snelheden ($v \ll c$) kunnen we dit benaderen via een Taylor-reeks:

$$d\tau_{\text{evenaar}} \approx d\tau_{\text{polen}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_{\text{evenaar}}^2}{c^2} \right)$$

Praktische Berekening

De rotatiesnelheid aan de evenaar is ongeveer:

$$\approx 1672 \text{ km/h of } 465 \text{ m/s}$$

Dit resulteert in:

$$\frac{v_{\text{evenaar}}^2}{c^2} \approx 2.4 * 10^{-12}$$

Daarmee:

$$d\tau_{\text{evenaar}} = d\tau_{\text{polen}} (1 - 1.2 * 10^{-12})$$

Interpretatie:

Een klok aan de evenaar tikt iets trager dan een klok aan de polen. Over een periode van 100 jaar zou het verschil oplopen tot ongeveer:

$$100 \text{ jaar} * 1.2 * 10^{-12} \approx 3,75 \text{ milliseconden}$$

Conclusie:

Een persoon die 100 jaar op de Noordpool heeft geleefd, zou (theoretisch) 3,75 milliseconden ouder zijn dan iemand die aan de evenaar verbleef, als alle andere omstandigheden gelijk zijn gebleven.

Aanvulling 3: De Schwarzschild-coëfficiënt en de Ontsnappingsnelheid

Laten we speciale aandacht besteden aan de factor:

$$1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

Deze uitdrukking doet denken aan de bekende formule voor de ontsnappingsnelheid, die bepaalt welke minimale snelheid een massa moet hebben om een andere massa (bijvoorbeeld de aarde) te kunnen verlaten.

We gaan deze relatie hieronder afleiden.

Berekening van de Minimale Ontsnappingsnelheid

Beschouwen we een massa m die wordt weggeschoten van een object met massa M (bijvoorbeeld de aarde), dan is:

- De kinetische energie van m :

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

- De gravitatiekracht die m ondervindt:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

waarbij r de afstand tot het centrum van massa M is.

- Het werk dat verricht moet worden om de massa m van r naar oneindig te brengen (waarbij de zwaartekrachtsinvloed nul is), is:

$$W = \int_r^\infty F ds = \int_r^\infty G \frac{Mm}{s^2} ds = -G \frac{Mm}{s} \Big|_r^\infty = G M m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = G \frac{Mm}{r}$$

Om te kunnen ontsnappen, moet de kinetische energie gelijk zijn aan dit werk:

$$\frac{1}{2}mv^2 = G \frac{Mm}{r}$$

Waaruit volgt:

$$v^2 = \frac{2GM}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Of omgekeerd:

$$r = \frac{2GM}{v^2}$$

De Maximale Snelheid: Licht

De maximale snelheid die een object kan bereiken is de lichtsnelheid c . Indien

$$v = c$$

dan wordt de bijbehorende afstand:

$$r = \frac{2GM}{c^2}$$

Dit is de zogeheten **Schwarzschild-radius**:

$$r = R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Wanneer een object zich binnen deze straal bevindt, is het onmogelijk om eraan te ontsnappen — zelfs licht kan niet ontsnappen. In dat geval spreken we van een **zwart gat**.

Verband met de Schwarzschild-metrick

In de Schwarzschild-metrick verschijnt deze straal in de factor:

$$1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

Normaal gesproken positief ligt deze factor tussen 1 en 0:

Normaal gesproken ligt deze factor tussen 1 en 0:

- **Voor grote afstanden** ($r \rightarrow \infty$) nadert de factor 1.
- **Nabij de Schwarzschild-radius** ($r = R_s$) wordt de factor 0.

Wanneer:

$$1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 0$$

bevindt het object zich precies op de Schwarzschild-radius, oftewel op de **gebeurtenishorizon** van een zwart gat.

Opmerking:

Als r kleiner wordt dan R_s , zou de factor negatief worden. Wat dit fysiek betekent, vereist diepere analyse binnen de relativistische theorie van zwarte gaten, en gaat verder dan wat we hier behandelen.

2.18 Experimenten

Talrijke experimenten zijn uitgevoerd ter bevestiging van de geldigheid van Einsteins veldvergelijkingen. Voor de theoretische voorspellingen werd daarbij gebruikgemaakt van de Schwarzschild-oplossing.

De volgende experimenten worden in dit werk besproken:

- Het Hafele-Keating-experiment (zie hoofdstuk [3.1](#))
- De beweging van deeltjes in een zwaartekrachtsveld (zie hoofdstuk [3.2](#))
- De afbuiging van licht in de nabijheid van massa's (zie hoofdstuk [3.2.3](#))
- De precessie van de periheliën, met name die van Mercurius (zie hoofdstuk [3.2.4](#))
- De Shapiro-tijdvertraging (zie hoofdstuk [3.3](#))
- De berekening van de baan van een kogel in een sterk zwaartekrachtsveld (zie hoofdstuk [3.6](#))

In alle gevallen bleken de theoretische voorspellingen, afgeleid uit de Schwarzschild-metrick, in overeenstemming met de experimentele of waargenomen resultaten. Deze overeenstemming vormt een sterke bevestiging van de juistheid van de algemene relativiteitstheorie.

3 Experimenten ter bevestiging van Einsteins Theorie

In dit hoofdstuk bespreken we een reeks experimenten die de algemene relativiteitstheorie (GR) van Einstein empirisch ondersteunen. Een centraal hulpmiddel bij de analyse van deze experimenten is de Schwarzschild-oplossing van de Einstein-veldvergelijkingen.

De volgende experimenten komen aan bod:

- Het Hafele–Keating-experiment (zie hoofdstuk [3.1](#))
- De beweging van deeltjes in een zwaartekrachtsveld (zie hoofdstuk [3.2](#))
- De afbuiging van licht in de nabijheid van massa's (zie hoofdstuk [3.2.3](#))
- De precessie van de periheliën van planeten, met name Mercurius (zie hoofdstuk [3.2.4](#))
- De Shapiro-tijdvertraging (zie hoofdstuk [3.3](#))
- De berekening van de baan van een kogel in een sterk zwaartekrachtsveld (zie hoofdstuk [3.6](#))

Deze experimenten vormen samen een krachtig bewijs voor de geldigheid van de algemene relativiteitstheorie. In elk geval biedt de Schwarzschild-metrick een wiskundig kader waarmee de waargenomen fenomenen nauwkeurig verklaard kunnen worden.

3.1 Experiment 1 - Het Hafele & Keating-experiment met de Schwarzschild-vergelijking

Afleiding gebaseerd op: *A Hafele & Keating-like thought experiment*, door Paul B. Andersen, 16 oktober 2008 (Andersen, 2008).

Het beroemde experiment van Hafele en Keating testte kwantitatieve voorspellingen van de relativiteitstheorie, met name de tijdsdilatatie als gevolg van zowel beweging (speciale relativiteitstheorie) als zwaartekracht (algemene relativiteitstheorie).

In dit experiment werden twee vliegtuigen uitgerust met cesiumklokken en liet men ze gelijktijdig in tegengestelde richtingen rond de aarde vliegen. Daarnaast bleef een derde cesiumklok op een vaste locatie op aarde (in Washington). De resultaten toonden aan dat de klokken aan boord verschillende tijdsdilatatie-effecten ondergingen, afhankelijk van hun bewegingsrichting en positie ten opzichte van de aarde.

De klok in het oostwaarts vliegende vliegtuig bewoog met de rotatie van de aarde mee. Daardoor had deze klok een grotere snelheid ten opzichte van het niet-roterende middelpunt van de aarde dan de grondklok. Dit leidde

tot een sterkere tijdsdilatie: de klok liep achter. Daarentegen bewoog het westwaarts vliegende vliegtuig tegen de rotatie van de aarde in, wat resulteerde in een lagere snelheid ten opzichte van het aardcentrum, en dus in een zwakkere tijdsdilatie: deze klok liep juist voor. Dit verschil in tijdsverloop toont aan dat de voortgang van de tijd afhankelijk is van de beweging van de waarnemer — een effect dat al in 1905 werd voorspeld door Einstein in zijn oorspronkelijke artikel over de speciale relativiteitstheorie.



Alle drie de klokken bewegen naar het oosten. Zelfs al beweegt het vliegtuig dat naar het westen vliegt ten opzichte van de lucht naar het westen, de lucht beweegt naar het oosten door de rotatie van de aarde.

Bron: (Crowell, 11 maart 2018)

Het doel van het experiment was om het gedrag van klokken te bestuderen onder invloed van zowel snelheid als zwaartekracht. Klokken in beweging ervaren volgens de speciale relativiteit een tragere tijd, terwijl klokken op grotere hoogte volgens de algemene relativiteit juist een versnelde tijdsverloop kennen vanwege de zwakkere zwaartekracht.

Om deze effecten theoretisch te analyseren, gebruiken we de **Schwarzschild-metriek**, die de ruimtetijd beschrijft buiten een sferisch symmetrisch massief lichaam zoals de aarde. De Schwarzschild-metriek luidt:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1)$$

Hierbij geldt:

- t : de coördinatentijd, gemeten door een hypothetische klok buiten elk zwaartekrachtsveld;
- τ : de eigen tijd, gemeten door een meebewegende klok op positie r ;
- r : afstand tot het middelpunt van de aarde;
- θ : breedtehoek ten opzichte van de Noordpool;
- ϕ : lengtehoek ten opzichte van een vaste meridiaan;
- G : de gravitatieconstante;
- M : de massa van de aarde;

- c : de lichtsnelheid.

De Schwarzschild-metrik gebruikt een universeel (sferisch) coördinatenstelsel met als oorsprong het zwaartepunt van de aarde. De aarde roteert binnen dit coördinatenstelsel. Veranderingen in de hoeken θ en ϕ beschrijven beweging over het aardoppervlak. Kleine veranderingen in tijd en ruimte worden respectievelijk aangeduid met dt , dr , $d\theta$ en $d\phi$.

Merk op dat dt de tijdsverandering is voor een hypothetische waarnemer ver weg van zwaartekrachtinvloeden; het is geen direct gemeten tijd maar een theoretische coördinatentijd. De daadwerkelijke tijd die door een klok op een bepaalde locatie wordt gemeten, is $d\tau$, de eigen tijd.

We zullen de Schwarzschild-metrik gebruiken om een benaderde formule af te leiden die de tijdsdilatatie van de klokken beschrijft, op basis van hun positie en beweging. Daarna geven we ook de volledige (exakte) oplossing. Hoewel die laatste complexer is, is ze met behulp van computerprogramma's zoals Excel goed hanteerbaar en levert ze een nauwkeurig resultaat.

3.1.1 Eerst de benaderde aanpak

We benaderen de situatie waarin de klokken zich op cirkelvormige banen rond de aarde bevinden: óf op zeeniveau, óf op een bepaalde hoogte boven het aardoppervlak. Omdat de banen cirkelvormig zijn, geldt dat $dr = 0$. Bovendien nemen we aan dat de beweging plaatsvindt in het vlak van de evenaar, waardoor $\theta = \pi/2$, constant is en dus $d\theta = 0$.

Daarmee vereenvoudigt vergelijking (1) zich tot:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - r^2 d\phi^2 \quad (2)$$

$$d\tau^2 = \left(\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \right) dt^2 \quad (3)$$

Als we gebruik maken van $v = r \frac{d\phi}{dt}$, krijgen we:

$$d\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{c^2}\right)} dt \quad (4)$$

Omdat de termen $\frac{2GM}{c^2 r}$ en $\frac{v^2}{c^2}$ zeer klein zijn ten opzichte van 1, kunnen we een eerste-orde benadering toepassen met een Taylor-reeks:

$$d\tau \approx \left(1 - \frac{GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt \quad (5)$$

Aangezien r en v constant zijn, kunnen we eenvoudig integreren:

$$\tau = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{2c^2}\right)t + \tau(0) \quad (6)$$

Het is interessant om nu de eigen tijd τ van verschillende klokken met elkaar te vergelijken. We nemen de klok op het aardoppervlak als referentie. Deze klok heeft snelheid v_1 als gevolg van de aardrotatie, en bevindt zich op afstand r_1 van het middelpunt van de aarde. Voor deze klok geldt:

$$d\tau_1 = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{2c^2}\right)dt \quad (7)$$

Voor een klok in een vliegtuig (met snelheid v_2 en afstand r_2):

$$d\tau_2 = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{2c^2}\right)dt \quad (8)$$

We willen nu het tijdsverloop van klok 2 uitdrukken ten opzichte van klok 1. Hiervoor gebruiken we een benadering voor de verhouding van de tijdseenheden:

$$d\tau_2 = \frac{\left(1 - \frac{GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{2c^2}\right)}{\left(1 - \frac{GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{2c^2}\right)} d\tau_1$$

Door gebruik te maken van $(1 - \varepsilon)^{-1} \approx 1 + \varepsilon$, volgt:

$$\begin{aligned} d\tau_2 &\approx \left(1 - \frac{GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{2c^2}\right) \left(1 + \frac{GM}{c^2 r_1} + \frac{v_1^2}{2c^2}\right) d\tau_1 \\ d\tau_2 &\approx \left(1 + \frac{GM}{c^2 r_1} + \frac{v_1^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{2c^2}\right) d\tau_1 \end{aligned}$$

Daar de termen $\frac{GM}{c^2 r_1}$, $\frac{v_1^2}{2c^2}$, $\frac{GM}{c^2 r_2}$ en $\frac{v_2^2}{2c^2}$ zeer klein zijn kunnen hun producten verwaarloosd worden, waaruit volgt:

$$\begin{aligned} d\tau_2 &\approx \left(1 + \frac{GM}{c^2 r_1} + \frac{v_1^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{2c^2}\right) d\tau_1 \\ d\tau_2 &\approx \left(1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2}\right) d\tau_1 \end{aligned} \quad (9)$$

Als we aannemen dat beide klokken starten bij $\tau_1 = \tau_2 = 0$ dan is de integratie direct:

$$\tau_2 \approx \left(1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2}\right) \tau_1 \quad (10)$$

Het verschil tussen de eigen tijden van twee klokken is:

$$\tau_2 - \tau_1 \approx \left(\frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2}\right) \tau_1 \quad (11)$$

Stel dat klok 1 zich op het aardoppervlak bevindt met straal R , en klok 2 zich in een vliegtuig op hoogte h , dan is $r_2=R+h$. Omdat $h \ll R$, kunnen we benaderen:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \approx \frac{h}{R^2} \Rightarrow \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) \approx \frac{gh}{c^2}$$

Dus:

$$\tau_2 - \tau_1 \approx \left(\frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right) \tau_1 \approx \left(\frac{GM}{c^2} \left(\frac{h}{R^2} \right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right) \tau_1 \quad (12)$$

Als we aannemen dat $\frac{h}{R} \ll 1$ en de zwaartekrachtversnelling $g = \frac{GM}{R^2}$ is, dan:

$$\tau_2 - \tau_1 = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2c^2} \right) \tau_1 \quad (13)$$

Aangezien $v_1 = v_{earth}$ (rotatiesnelheid van de aarde) en $v_2 = v_{plane} + v_{earth}$ (snelheid van het vliegtuig ten opzichte van het coördinatenstelsel), krijgen we:

$$\begin{aligned} v_1^2 - v_2^2 &= v_{earth}^2 - (v_{plane} + v_{earth})^2 = v_{earth}^2 - v_{plane}^2 - 2v_{earth}v_{plane} - v_{earth}^2 \\ v_1^2 - v_2^2 &= -v_{plane}^2 - 2v_{earth}v_{plane} = -v_{plane}(v_{plane} + 2v_{earth}) \end{aligned}$$

Invullen in (13) geeft:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{v_{plane}(v_{plane} + 2v_{earth})}{2c^2} \right) \tau_{earth} \quad (14)$$

Deze vergelijking is dus volledig afgeleid van de Schwarzschild-vergelijking met enkele benaderingen.

Deze formule stemt overeen met de benadering zoals gebruikt in het originele Hafele-Keating-experiment en is dus consistent afgeleid vanuit de Schwarzschild-vergelijking, inclusief de noodzakelijke benaderingen.

Opmerking 1:

Als de snelheid v_2 van het vliegtuig een grondsnelheid betreft, dan kan, als benadering op hoogte h , worden gesteld:

$$v_2 = \frac{R+h}{R} (v_{plane} + v_{earth})$$

In dat geval zou formule (13) dienovereenkomstig aangepast worden.

Opmerking 2:

Een nauwkeuriger benadering wordt besproken in het volgende hoofdstuk, waar de snelheden v_1 en v_2 specifiek worden afgeleid op basis van het gebruikte coördinatenstelsel.

3.1.2 Uitwerking van V_1 en V_2 in Vergelijking (13)

De snelheid v_1 in [vergelijking 3 1 1 13](#) is de snelheid van een stilstaand punt op de evenaar van het aardoppervlak. Deze wordt uitgedrukt als:

$$v_1 = r_1 \frac{d\phi}{dt}$$

waarbij dt coördinaattijd is in het 'universele' referentiekader. Omdat metingen op het aardoppervlak echter plaatsvinden met betrekking tot de lokale eigen tijd τ , is een conversie nodig. Door de kettingregel geldt:

$$v_{1t} = r_1 \frac{d\phi}{dt} = r_1 \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = v_{1\tau} \frac{d\tau}{dt} \quad (14a)$$

We gebruiken de Schwarzschild-metrick (in het equatoriale vlak en met $dr=0$) om $d\tau/dt$ te vinden:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right) c^2 dt^2 - r_1^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 d\tau^2$$

Herordening levert:

$$\left(1 + \frac{r_1^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2\right) d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right) dt^2$$

We definiëren nu:

$$\sigma^2 = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{v_{1\tau}^2}{c^2}\right) d\tau^2 &= \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right) dt^2 = \sigma_1^2 dt^2 \\ \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 &= \frac{\sigma_1^2}{\left(1 + \frac{v_{1\tau}^2}{c^2}\right)} \end{aligned} \quad (14b)$$

Substitutie in(14a) geeft:

$$v_{1t}^2 = v_{1\tau}^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = v_{1\tau}^2 \frac{\sigma_1^2}{\left(1 + \frac{v_{1\tau}^2}{c^2}\right)}$$

De uitdrukking laat zien dat $d\tau/dt$ — en dus de conversie tussen coördinaattijd en eigen tijd — afhankelijk is van $v_{1\tau}$, de rotatiesnelheid van de aarde gemeten in eigen tijd op het aardoppervlak.

Beschouw nu een vliegtuig dat oostwaarts vliegt. De totale snelheid op aardniveau is dan:

$$v_{1\tau_plane} = v_{plane_ \tau} + v_{1\tau_earth\ h} = r_1 \frac{d\phi}{d\tau}$$

waarbij:

- $v_{plane_ \tau}$ de snelheid van het vliegtuig is t.o.v. het aardoppervlak, gemeten in eigen tijd
- $v_{1\tau_earth\ h}$ de rotatiesnelheid van een stilstaand punt op aarde is, ook gemeten in eigen tijd

De bijbehorende hoeksnelheid in het universele frame is dan:

$$r_1 \frac{d\phi}{dt} = r_1 \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = (v_{plane_ \tau} + v_{1\tau_earth\ h}) \frac{d\tau}{dt} = (v_{plane_ \tau} + v_{1\tau_earth\ h}) \frac{\sigma_1}{\sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth\ h}^2}{c^2}}}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = (v_{plane_ \tau} + v_{1\tau_earth\ h}) \frac{\sigma_1}{r_1 \sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth\ h}^2}{c^2}}}$$

Hier hebben we de rotatiesnelheid (hoeksnelheid) berekend in het universele frame. Dit is geldig voor elk niveau, ofwel elke afstand vanaf het middelpunt. Maar de snelheid zelf wordt bepaald door r maal deze rotatiesnelheid.

Snelheid op niveau van het vliegtuig

$v_{plane_ \tau}$ is de gemeten snelheid van het vliegtuig op grondniveau en ten opzichte van de eigen tijd, wat de enige beschikbare tijd is op dat niveau. $v_{earth\ h_ \tau}$ is de (roterende) snelheid van een stilstaand punt op aarde ten opzichte van het universele frame, maar gemeten met de eigen tijd op aardniveau.

De snelheid van het vliegtuig in het universele frame op hoogte r_2 is:

$$v_{2t} = r_2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\sigma_1 (v_{plane_ \tau} + v_{1\tau_earth\ h})}{\sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth\ h}^2}{c^2}}}$$

We splitsen deze snelheid in een 'aardrotatie'- en een 'vliegtuig'-component:

$$v_{2t} = v_{2t_earth\ h} + v_{2t_plane}$$

Met:

$$v_{2t_earth\ h} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\sigma_1 v_{1\tau_earth\ h}}{\sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth\ h}^2}{c^2}}}$$

En:

$$v_{2t_plane} = v_{2t} - v_{2t_earth} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\sigma_1 v_{plane_t}}{\sqrt{1 + \frac{v_{1t_earth}^2}{c^2}}}$$

Samenvatting van het resultaat:

De conversie van snelheid op aardniveau naar het universele frame:

$$v_{1t_earth} = v_{1t_earth} \frac{\sigma_{earth}}{\sqrt{1 + \frac{v_{1t_earth}^2}{c^2}}} \quad (15)$$

De snelheid v_2 van het vliegtuig in het universele frame is:

$$v_{2t} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\sigma_{earth} (v_{plane_t} + v_{earth_t})}{\sqrt{1 + \frac{v_{1t_earth}^2}{c^2}}} \quad (16)$$

Substitutie in vergelijking (3.1.1. 13):

$$\tau_2 - \tau_1 = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2c^2} \right) \tau_1 \quad (13)$$

wordt dan:

$$\tau_2 - \tau_1 = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{\sigma_{earth}^2}{1 + \frac{v_{1t_earth}^2}{c^2}} \cdot \frac{1}{2c^2} \left[\left(\frac{R+h}{R} \right)^2 (v_{plane_t} + v_{earth_t})^2 - v_{1t_earth}^2 \right] \right) \tau_1 \quad (17)$$

Deze vergelijking beschrijft de tijdsdilatatie tussen een klok op het aardoppervlak en een klok aan boord van een vliegtuig, rekening houdend met zowel gravitationele als snelheidsafhankelijke effecten, alle gebaseerd op lokaal meetbare grootheden.

3.1.3 De Exacte Afleiding

In plaats van een benadering, maken we nu een exacte afleiding, volledig gebaseerd op de Schwarzschild-metrick.

We beginnen bij vergelijking (4)

$$d\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{c^2} \right)} dt \quad (4)$$

Aangezien r en v constant zijn, is de integratie eenvoudig:

$$\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{c^2}\right)} t + \tau(0) \quad (6a)$$

Het doel is de eigen tijd van verschillende klokken met elkaar te vergelijken. Als referentie nemen we de klok op het aardoppervlak. Andere klokken bevinden zich in vliegtuigen, op grotere hoogte en met verschillende snelheden. Zelfs de klok op aarde heeft een niet-nul snelheid door de aardrotatie.

Voor de klok op het aardoppervlak (straal r_1 , snelheid v_1) geldt:

$$d\tau_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)} dt \quad (7a)$$

Voor de klok in het vliegtuig (straal r_2 , snelheid v_2):

$$d\tau_2 = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)} dt \quad (8a)$$

Om de verhouding tussen de twee eigen tijden te vinden, delen we deze uitdrukkingen:

$$d\tau_2 = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}} d\tau_1 \quad (9a)$$

Bij gelijke begintijd ($\tau_2(0) = \tau_1(0) = 0$), is de oplossing:

$$\tau_2 = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}} \tau_1 \quad (10a)$$

Tijdverschil tussen twee klokken

Het tijdsverschil tussen de twee klokken is:

$$\tau_2 - \tau_1 = \left(\frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}} - 1 \right) \tau_1 \quad (11a)$$

Stel $r_1 = R$, de straal van de aarde, en $r_2 = R + h$, de hoogte van het vliegtuig, dan wordt dit:

$$\tau_2 - \tau_1 = \left(\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2(R+h)} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}} - 1 \right) \tau_1 \quad (12a)$$

Snelheden en gravitationele effecten

In deze uitdrukking:

- v_1 is de rotatiesnelheid van een punt op het aardoppervlak (richting oost),
- v_2 is de snelheid van het vliegtuig ten opzichte van het universele referentiekader.

Beide snelheden werden eerder afgeleid in [vergelijking 14b](#) en [vergelijking 15b](#) van hoofdstuk [3.1.5](#)

Het tijdsverschil tussen het vliegtuig en de aarde is dus:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2(R+h)} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}} - 1 \right) \tau_{earth} \quad (14b)$$

Door gebruik te maken van de Schwarzschildstraal $R_s = \frac{2GM}{c^2}$, herschrijven we dit als:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{R_s}{(R+h)} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{R_s}{R} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}} - 1 \right) \tau_{earth} \quad (15b)$$

Conclusie

Deze vergelijking is een exacte uitdrukking, rechtstreeks afgeleid uit de Schwarzschild-metrik. Ze toont hoe het verschil in eigen tijd tussen een klok op aarde en een klok in een vliegtuig beïnvloed wordt door:

- **Gravitationele tijdsdilatatie:** veroorzaakt door het verschil in zwaartekrachtspotentiaal;
- **Snelheidsafhankelijke tijdsdilatatie:** een gevolg van de speciale relativiteitstheorie door de beweging van beide klokken.

Berekeningen gebaseerd op de uitgevoerde experimenten:

	PaulAnderson	Re_Spec_92	H&K
Vplane_ground_east_tau	232.55	670	173.98
Vplane_ground_West_tau	-232.55	-670	-124.43
Vplane2_east in dt	232.88	672.00	174.19
Vplane2_west in dt	-232.88	-672.00	-124.62
V_earth_tau	464.58	464.58	464.58
V_earth_t	464.58	464.58	464.58
V_earth_east on plane level dt	465.24	465.97	465.14
V_earth_west on plane level dt	465.24	465.97	465.28
H_east	9000	19000	7664
H_west	9000	19000	9526
t_earth	172328	59746.528	172328
Result (formula 7.1.13):			
Grav_delay (ns)_East	169.46	124.03	144.31
Kin_delay (ns)_East	-260.32	-358.69	-184.94
Total_East	-9.09E-08	-2.35E-07	-4.06E-08
Grav_delay (ns)_West	169.46	124.03	179.37
Kin_delay (ns)_West	155.16	57.63	95.67
Total_West	3.25E-07	1.82E-07	2.75E-07
Exact (Formula: 7.3.15):			
Total_East (ns)	-9.11E-08	-2.35E-07	-4.08E-08
Total_West	3.24E-07	1.81E-07	2.75E-07
diff east	2.35E-10	3.63E-10	1.56E-10
diff west	2.18E-10	3.67E-10	2.58E-10
diff east in %	-0.26%	-0.15%	-0.38%
diff west in %	0.07%	0.20%	0.09%
sidereal day: 23.9344696hr	86164.1	86164.1	86164.1
Lightvelocity	299792458	299792458	299792458
G	6.67E-11	6.67E-11	6.67E-11
M_earth	5.97E+24	5.97E+24	5.97E+24
R_earth	6371000	6371000	6371000
Schwarzschild radius Rs:	8.87E-03	8.87E-03	8.87E-03

Conclusie:

De benaderingen zijn correct binnen een nauwkeurigheid van 0.4%

3.1.4 De Snelheid van een Stilstaand Punt op de Evenaar aan het Aardoppervlak

Om de snelheid van een stilstaand punt op de evenaar te berekenen, moeten we eerst de rotatietijd van de aarde bepalen: de **sterrendag** (*sidereal day*).

Sterrendag versus etmaal

Een gewone dag of **etmaal** (24 uur) is de tijd tussen twee opeenvolgende hoogste standen van de zon aan de hemel. Deze tijd is gebaseerd op de **zonnecyclus**, niet op de werkelijke rotatie van de aarde.

Door de jaarlijkse baan van de aarde rond de zon, maakt de aarde in een jaar **één extra rotatie** ten opzichte van de vaste sterrenhemel. In één jaar (365,25 zonne-etmalen) draait de aarde daarom **366,25 keer** om haar as t.o.v. de sterren.

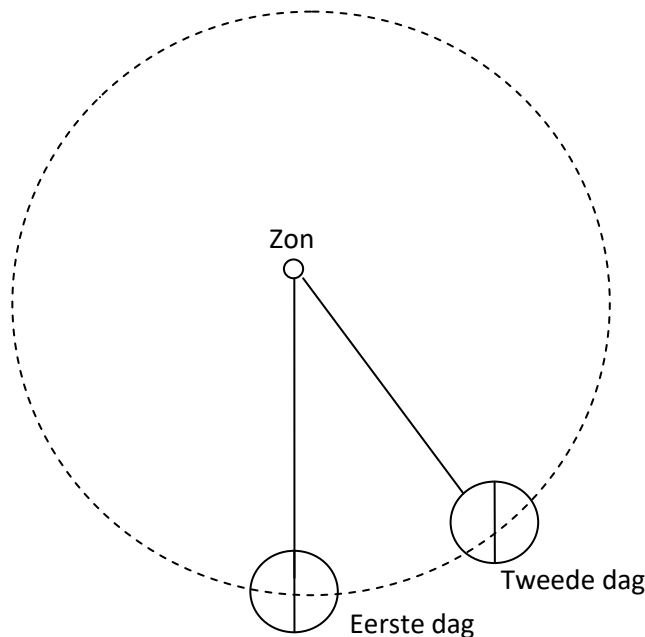
Daaruit volgt de duur van één sterrendag:

$$T_{sidereal} = \frac{365.25}{366.25} * 24 * 3600 = 86164.1 \text{ seconden.}$$

Dit is omgerekend:

$$\frac{86164.1}{3600} = 23.93447 \text{ uur}$$

⇒ Of wel 23 uur, 56 minuten en 4 seconden.



Snelheid op de evenaar

Met de straal van de aarde $R=6371$ km, oftewel 6.371×10^6 m, kunnen we de omtrek aan de evenaar berekenen:

$$Omtrek = 2\pi R = 2\pi \times 6,371 \times 10^6 \approx 4,003 \times 10^7 \text{ m}$$

De snelheid van een stilstaand punt op de evenaar (ten opzichte van een niet-meedraaiend referentiekader) is dan:

$$v_{earth} = \frac{2\pi R}{T_{sideraal}} = \frac{4.003 \times 10^7}{86164.1} = 464.58 \text{ m/s}$$

Ter vergelijking: Als we ten onrechte een dag van 24 uur zouden nemen, krijgen we:

$$v = \frac{2\pi R}{86400} = 463.3 \text{ m/s}$$

Samenvatting

- Een **sterrendag** duurt ongeveer **23 uur, 56 minuten en 4 seconden**.
- De snelheid van een stilstaand punt op de **evenaar** is ongeveer **464,58 m/s**.
- Het verschil tussen een sterrendag en een zonne-etmaal leidt tot een meetbaar verschil in snelheid, belangrijk voor relativistische berekeningen zoals in het Hafele–Keating-experiment.

3.1.5 Correctie op afleiding gebaseerd op Paul Anderson

In de oorspronkelijke afleiding van Anderson wordt de snelheid van het vliegtuig ingevoerd ten opzichte van het aardoppervlak. In zijn formule [3.1.1.3](#) is deze snelheid echter uitgedrukt ten opzichte van de coördinatietijd dt , terwijl de klokken in beweging eigen tijd $d\tau$ meten. Dit vereist een correctie: de snelheid van het object moet worden uitgedrukt ten opzichte van zijn eigen klok, dus via $d\tau$.

Startpunt: De volledige Schwarzschild-relatie

We nemen als uitgangspunt vergelijking [2](#) uit hoofdstuk [3.1.1](#), zonder benadering:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - r^2 d\varphi^2 \quad (2)$$

Delen door c^2 geeft:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 d\tau^2 \quad (3b)$$

$$d\tau^2 \left[1 + \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right] = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 \quad (3c)$$

$$d\tau = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)}}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2}} dt \quad (4b)$$

Met:

$$v_\tau = r \frac{d\phi}{d\tau} \quad (4c)$$

Dus:

$$d\tau_1 = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} \right)}}{\sqrt{1 + \frac{v_1^2}{c^2}}} dt \quad (7b)$$

$$d\tau_2 = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} \right)}}{\sqrt{1 + \frac{v_2^2}{c^2}}} dt \quad (8b)$$

$$d\tau_2 = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} \right) \left(1 + \frac{v_1^2}{c^2} \right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} \right) \left(1 + \frac{v_2^2}{c^2} \right)}} d\tau_1 \quad (9b)$$

Daaruit volgt de vergelijking tussen beide eigen tijden:

$$\tau_2 = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} \right) \left(1 + \frac{v_1^2}{c^2} \right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} \right) \left(1 + \frac{v_2^2}{c^2} \right)}} \cdot \tau_1 \quad (10b)$$

Als we $\tau_1 = \tau_{earth}$ nemen (klok op zeeniveau) en $\tau_2 = \tau_{plane}$, wordt:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} \right) \left(1 + \frac{v_1^2}{c^2} \right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} \right) \left(1 + \frac{v_2^2}{c^2} \right)}} - 1 \right) \tau_{earth} \quad (11b)$$

Hier is $r_1 = R$, de straal van de aarde. De afstand van de klok in een vliegtuig is dan $R + h$:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2(R+h)}\right) \left(1 + \frac{v_{earth}^2 h^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) \left(1 + \frac{v_2^2}{c^2}\right)}} - 1 \right) \tau_{earth} \quad (14b)$$

Of met Schwarzschild-radius $R_s = \frac{2GM}{c^2}$:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{R_s}{(R+h)}\right) \left(1 + \frac{v_{earth}^2 h^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{R_s}{R}\right) \left(1 + \frac{v_2^2}{c^2}\right)}} - 1 \right) \tau_{earth} \quad (15b)$$

Relatieve snelheid op vlieghoogte

De grondsnelheid van het vliegtuig (relatief t.o.v. het aardoppervlak) moet worden omgerekend naar een coördinatenonafhankelijke snelheid op vlieghoogte:

$$v_2 = (v_{earth} + v_{plane \text{ relatief to earth point}}) \cdot \frac{R+h}{R}$$

Tot nu toe is de formule zonder benaderingen.

Na eerste-orde Taylorbenaderingen van vergelijking (14b), zoals eerder gedaan, wordt het resultaat:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\left(1 - \frac{GM}{c^2(R+h)}\right) \left(1 + \frac{GM}{c^2 R}\right) \left(1 + \frac{v_{earth}^2 h^2}{2c^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{2c^2}\right) - 1 \right) \tau_{earth} \quad (16)$$

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\left(1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)\right) \left(1 + \frac{(v_{earth}^2 h^2 - v_2^2)}{2c^2}\right) - 1 \right) \tau_{earth} \quad (17)$$

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\left(1 + \frac{GM}{c^2} \frac{h}{R^2}\right) \left(1 + \frac{(v_{earth}^2 h^2 - v_2^2)}{2c^2}\right) - 1 \right) \tau_{earth} \quad (18)$$

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\frac{GM}{c^2} \frac{h}{R^2} + \frac{(v_{earth}^2 h^2 - v_2^2)}{2c^2} \right) \tau_{earth} \quad (19)$$

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{(v_2^2 - v_{earth}^2 h^2)}{2c^2} \right) \tau_{earth} \quad (20)$$

Opmerking:

De snelheid van het vliegtuig wordt gegeven als de grondsnelheid. Het is niet direct duidelijk of deze gemeten is ten opzichte van de klok op aarde of de klok in het vliegtuig. Laten we aannemen dat de klok op aarde bedoeld is. In dat geval moeten we een conversie maken naar het niveau van het vliegtuig, wat betekent dat we de klok

op dat niveau moeten beschouwen. Dit doen we via de tijd t in het universele frame. Als we $\frac{d\phi_{earth\ h}}{dt}$ beschouwen, is dit de rotatiesnelheid van de aarde in het universele frame. We kunnen de snelheid van de aarde op zeeniveau vinden door $\frac{d\phi_{earth\ h}}{dt}$ te vermenigvuldigen met R , de afstand vanaf het middelpunt. De snelheid van de aarde gezien vanaf het niveau van het vliegtuig is $(R + h) \frac{d\phi_{earth\ h}}{dt}$. Voor het vliegtuig geldt hetzelfde, op zeeniveau is de relatieve vliegtuigsnelheid $R \frac{d\phi_{plane}}{dt}$ en op vliegtuigniveau $(R + h) \frac{d\phi_{plane}}{dt}$. Nu moeten $\frac{d\phi_{earth\ h}}{dt}$ en $\frac{d\phi_{plane}}{dt}$ worden gevonden.

We gebruiken uit hoofdstuk [3.1.5 vergelijking 4c](#)

$$v_r = r \frac{d\phi}{d\tau} = r \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{v_r}{r} \frac{d\tau}{dt}$$

Vervolgens gebruiken we uit hoofdstuk [3.1.5 vergelijking 3 1 5 4b](#)

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}{1 + \frac{v_r^2}{c^2}}}$$

Dus:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{v_r}{r} \frac{d\tau}{dt} = \frac{v_r}{r} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}{1 + \frac{v_r^2}{c^2}}}$$

Alle componenten aan de rechterkant zijn bekend.

Op zeeniveau:

$$\frac{d\phi_{earth\ h}}{dt} = \frac{v_{earth\ h}}{R} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)}{1 + \frac{v_{earth\ h}^2}{c^2}}}$$

En voor het vliegtuig geldt analoog:

$$\frac{d\phi_{plane}}{dt} = \frac{v_{plane}}{R} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)}{1 + \frac{v_{earth\ h}^2}{c^2}}}$$

Nu op vliegtuigniveau:

$$v_2 = v_{2\tau_{earth\ h}} + v_{2\tau_{plane}} = (R + h) \left(\frac{d\phi_{earth\ h}}{dt} + \frac{d\phi_{plane}}{dt} \right)$$

$$v_2 = v_{2\tau_{earth\ h}} + v_{2\tau_{plane}} = \frac{(R + h)}{R} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)}{1 + \frac{v_{earth\ h}^2}{c^2}}} (v_{earth\ h} + v_{plane})$$

Tot nu toe was v_2 nog exact.

Maar nu met een eerste-orde Taylorbenadering wordt:

$$v_2 = \frac{(R + h)}{R} \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) \left(1 - \frac{v_{earth}^2}{c^2}\right)} (v_{earth} + v_{plane})$$

Dus, de relevante formules zijn:

$$v_2 = \frac{(R + h)}{R} \left(1 - \frac{GM}{c^2 R} - \frac{v_{earth}^2}{2c^2}\right) (v_{earth} + v_{plane})$$

Resultaat na Taylorbenadering

Toegepast op vergelijking (14b), leidt dit na linearisatie tot

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{(v_2^2 - v_{earth}^2)}{2c^2} \right) \tau_{earth} \quad (20)$$

Conclusie:

Deze herziene aanpak corrigeert de inconsistentie in de oorspronkelijke afleiding: snelheden dienen gerelateerd te zijn aan eigen tijd, niet aan coördinatietijd. Na correctie en Taylorbenadering blijkt dat de numerieke afwijking t.o.v. de benadering in het vorige hoofdstuk **minder dan 0,4%** bedraagt — binnen de gewenste nauwkeurigheid.

Exact (Formula: 3.1.5.15b):	Paul Anderson	Re_Spec_92	H&K
Total_East	-9.11E-08	-2.35E-07	-4.08E-08
Total_West	3.24E-07	1.81E-07	2.75E-07
sidereal day: 23.9344696hr	86164.1	86164.1	86164.1
Lightvelocity	299792458	299792458	299792458
G	6.67E-11	6.67E-11	6.67E-11
M_earth	5.97E+24	5.97E+24	5.97E+24
R_earth	6371000	6371000	6371000
Schwarzschild radius Rs:	8.87E-03	8.87E-03	8.87E-03
Formula: 3.1.5.20			
Vplane_ground_east_tau	232.55	670	173.98
Vplane_ground_West_tau	-232.55	-670	-124.43
V_earth_tau	464.58	464.58	464.58
H_east	9000	19000	7664
H_west	9000	19000	9526
t_earth	172328	59747	172328
v2_east	698.12	1137.96	639.33
v2_west	232.36	-206.03	340.56
Grav_delay (ns)_East	1.69E-07	1.24E-07	1.44E-07
Kin_delay (ns)_East	-2.60E-07	-3.59E-07	-1.85E-07
Total_East	-9.09E-08	-2.35E-07	-4.06E-08
Grav_delay (ns)_West	1.69E-07	1.24E-07	1.79E-07
Kin_delay (ns)_West	1.55E-07	5.76E-08	9.57E-08
Total_West	3.25E-07	1.82E-07	2.75E-07
diff east	-2.35E-10	-3.63E-10	-1.56E-10
diff west	-2.18E-10	-3.67E-10	-3.23E-10
diff east in %	0.26%	0.15%	0.38%
diff west in %	-0.07%	-0.20%	-0.12%

3.1.6 Overwegingen bij het Hafele-Keating-experiment en de Schwarzschild-metrick

We beginnen met de algemene Schwarzschild vergelijking:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1)$$

Zoals eerder gehanteerd, definiëren we:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$$

Met deze notatie wordt vergelijking (1) herschreven als:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1a)$$

In het Hafele-Keating-experiment worden de tijd van de klok van het United States Naval Observatory (USNO) en de snelheid van een vliegtuig gemeten. De vraag luidt: wat vertegenwoordigen de tijd en de snelheid in de context van de Schwarzschild-metrick?

Er is een stationaire klok op zeeniveau op de evenaar, en twee vliegtuigen die zich bewegen in het equatoriale vlak — één naar het oosten, de ander naar het westen. Beide vliegtuigen volgen een cirkelvormige baan met constante snelheid ten opzichte van het aardoppervlak, maar in tegengestelde richtingen.

Aangezien het experiment plaatsvindt in het equatoriale vlak, nemen we aan dat $\theta = \frac{\pi}{2}$ constant is, en dat r eveneens constant is wegens de cirkelvormige baan. De Schwarzschild-metrick vereenvoudigt zich dan tot:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - r^2 d\phi^2 \quad (2)$$

De coördinaten (t, r, θ, ϕ) in de Schwarzschild-metrick kunnen worden geïnterpreteerd als behorend tot een universeel (inertiaal) referentiestelsel waarin de aarde roteert. De klokken op het aardoppervlak en in de vliegtuigen bevinden zich elk in hun eigen, lokaal inertiaal stelsel; hun gemeten tijd wordt weergegeven als de eigen tijd τ .

De universele coördinatietijd t is niet direct meetbaar, maar vormt een theoretische grootheid. Vanuit vergelijking (2) volgt:

$$dt^2 = \frac{d\tau^2 + \frac{r^2}{c^2} d\phi^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} = \sigma^{-2} \left(d\tau^2 + \frac{r^2}{c^2} d\phi^2 \right) = \sigma^{-2} \left(1 + \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right) d\tau^2 \quad (4)$$

Onder de aanname $t=0$ wanneer $\tau = 0$, leidt dit tot:

$$t = \sigma^{-1} \sqrt{1 + \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2} \tau = \sigma^{-1} \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \tau \quad (4a)$$

Waarbij $v = r \frac{d\phi}{d\tau}$ de snelheid is ten opzichte van het universele frame. Voor snelheden veel kleiner dan c , kunnen we een eerste-orde Taylorbenadering toepassen:

$$t = \sigma^{-1} \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \tau = \frac{1}{\sigma \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tau = \frac{\gamma}{\sigma} \tau \quad (4b)$$

met $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ de Lorentzfactor. Deze vergelijking drukt uit hoe de eigen tijd τ van een bewegende klok relateert aan de coördinatietijd t in het Schwarzschild-stelsel.

3.2 Experiment 2 - Beweging van Deeltjes in Schwarzschild-geometrie

De afleidingen in dit hoofdstuk zijn grotendeels gebaseerd op de volgende bronnen:

- (Biesel, 2008) *The Precession of Mercury's Perihelion*, Owen Biesel, 25 januari 2008 (Biesel, 2008)
- (Magnan) Christian Magnan: *Complete calculations of the perihelion precession of Mercury and the deflection of light by the Sun in General Relativity* (Magnan)
- (Pe'er1, 2014) *Schwarzschild Solution and Black Holes*, Asaf Pe'er1, 19 februari 2014 (Pe'er1, 2014)

We zullen vergelijkingen afleiden voor de beweging van deeltjes in de Schwarzschild-geometrie, die als basis dient voor de volgende experimenten:

- De precessie van het perihelium van Mercurius,
- De afbuiging van licht door de zon,
- Het Shapiro-experiment
- De berekening van een kogelbaan.

We gebruiken de Schwarzschild-metrick als uitgangspunt, omdat deze exact voldoet aan de veldvergelijkingen van Einstein en breed toepasbaar is gebleken. Vanwege de symmetrie in zowel de tijd t als de hoekcoördinaat ϕ – d.w.z. geen van de metrickcoëfficiënten hangt van t of ϕ af – is de Schwarzschild-metrick onderhevig aan de stelling van Noether. Deze stelt dat iedere continue symmetrie in het actieprincipe correspondeert met een behoudswet. Hieruit volgt behoud van energie (door tijdsonafhankelijkheid) en behoud van impulsmoment (door ϕ -onafhankelijkheid).

Schwarzschild-metriek

De metriek luidt:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - \frac{r^2}{R_p^2} dR_p^2 \cdot \theta^2 - \frac{r^2}{R_p^2} \sin^2 \theta^2 dR_p^2 \cdot \phi^2$$

Om de juiste dimensies te verkrijgen (alle coördinaten in meters), zetten we $R_p=1m$, waardoor de coëfficiënten dimensieloos worden. Dit leidt tot de meer gebruikelijke vorm:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (1a)$$

met:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}, \text{ waarbij } R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Coëfficiënten van de metriek

Voor de metriek in polaire coördinaten vinden we:

$$g_{00} = \sigma^2; \quad g_{11} = \frac{-1}{\sigma^2}; \quad g_{22} = -r^2; \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

Voor het equatoriale vlak $\theta = \frac{\pi}{2}$ geldt dus $g_{33} = -r^2$.

De contravariante componenten zijn:

$$g^{00} = \frac{1}{\sigma^2}; \quad g^{11} = -\sigma^2; \quad g^{22} = \frac{-1}{r^2}; \quad g^{33} = \frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

Verder geldt:

$$\frac{d\sigma}{dr} = \frac{R_s}{2r^2 \sigma}$$

Afgeleiden van metriekcomponenten

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial r} = \frac{R_s}{r^2}; \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial r} = \frac{R_s}{r^2 \sigma^4};$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial r} = -2r;$$

$$\frac{\partial g_{33}}{\partial r} = -2r \sin^2 \theta;$$

$$\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = -2r^2 \sin \theta \cos \theta$$

Niet-nul Christoffel-symbolen

Christoffel-symbolen zijn gegeven door:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

Enkele relevante niet-nul symbolen zijn:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} \left\{ \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} = \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2}; \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} = \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2}; \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \right\} = \frac{-R_s}{2r^2 \sigma^2} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\} = -r \sigma^2; \quad \Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} = -r \sigma^2 \sin^2 \theta \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\} = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\} = -\cos \theta \sin \theta \\ \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Alle anderen Christoffel symbolen zijn nul

Geodetische vergelijking en behoudswetten

We beschouwen een geodetische wereldlijn, die de natuurlijke bewegingsbaan van een deeltje beschrijft in afwezigheid van niet-gravitationele krachten. De algemene vorm van de geodetische vergelijking is:

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \cdot \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0$$

We werken de vier coördinaten uit, waarbij λ de affiene parameter is (maar hier gelijkgesteld kan worden aan de eigen tijd τ):

- Voor t :

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^t \cdot \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{01}^0 \cdot \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + 2 \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} \cdot \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0$$

- Voor r :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^r \cdot \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} &= \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \Gamma_{00}^1 \cdot \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{11}^1 \cdot \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{22}^1 \cdot \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{33}^1 \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 \\ &= \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \cdot \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} \cdot \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - r \sigma^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 - r \sigma^2 \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

- Voor θ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\theta} \cdot \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} &= \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{12}^2 \cdot \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} + \Gamma_{33}^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 \\ &= \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + 2 \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} - \cos \theta \sin \theta \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

- Voor φ :

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\varphi} \cdot \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} &= \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{13}^3 \cdot \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} + 2\Gamma_{23}^3 \cdot \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} \\ &= \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0\end{aligned}$$

Samengevat leiden deze vier componentvergelijkingen tot:

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} + 2\frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r\sigma^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 - r\sigma^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + 2\frac{1}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} - \cos\theta \sin\theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2\frac{1}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0 \quad (4)$$

We zullen eerst de elegante aanpak van Asaf Pe'er volgen uit zijn artikel "Schwarzschild Solution and Black Holes" (Pe'er1, 2014), om vervolgens een eenvoudigere benadering te presenteren.

Volgens Asaf Pe'er:

"Op het eerste gezicht lijkt er niet veel hoop te zijn om dit stel van vier gekoppelde vergelijkingen eenvoudig op te lossen. Gelukkig wordt onze taak sterk vereenvoudigd door de hoge mate van symmetrie van de Schwarzschild-metrick."

De Schwarzschild-ruimte heeft vier Killing-velden: drie vanwege de sferische symmetrie, en één vanwege tijdtranslatie. Elk Killing-veld leidt via Noether's stelling tot een constante van de beweging voor een vrij deeltje. Als K_{μ} een Killing-veld is, geldt:

$$K_{\mu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} = \text{constant}. \quad (5)$$

Daarnaast is er altijd nog een andere constante van beweging die volgt uit metrische compatibiliteit. Deze zegt dat langs de geodetische wereldlijn de grootte

$$\begin{aligned}ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \\ \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 &= \left(\frac{cd\tau}{d\lambda}\right)^2 = c^2 \varepsilon = g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\end{aligned} \quad (6)$$

constant is. Dit is de normalisatie van de vier-snelheid. Hierbij is $\varepsilon = 1$ voor massieve deeltjes, $\varepsilon = 0$ voor massalose deeltjes (zoals fotonen), en $\varepsilon = -1$ voor ruimtelijke geodeten.

In plaats van direct de vier gekoppelde geodetische vergelijkingen op te lossen, maken we gebruik van de symmetrieën die via Killing-velden leiden tot behoudswetten.

In vlakke ruimtetijd leiden de symmetrieën, vertegenwoordigd door de Killing-velden en volgens de stelling van Noether, tot zeer bekende behouden grootheden:

- Tijdtranslatie-invariantie resulteert in energiebehoud,
- Rotatie-invariantie in behoud van impulsmoment.

Voor Schwarzschild geldt analoog:

- **Beweging in een vlak:** Impulsmoment behoudt zijn richting → deeltje beweegt in een vlak. Door coördinatenrotatie mogen we dat kiezen als het evenaarsvlak:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

- **Behoud van energie:** Het tijdachtige Killing-veld is $K^\mu = (1,0,0,0)^T$, en dus:

$$K_\mu = K^\nu g_{\mu\nu} = \left(\left(1 - \frac{2GM}{r} \right), 0,0,0 \right) \quad (8)$$

Daarmee volgt:

$$K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{c^2}, \quad (9)$$

of gedefinieerd als:

$$k = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{c^2} \quad (9a)$$

- **Behoud van impulsmoment:** De Killing-vector geassocieerd met ϕ -rotaties is $L^\mu = (0,0,0,-1)^T$, en:

$$L_\mu = g_{\mu\nu} L^\nu = (0,0,0,-r^2 \sin^2 \theta). \quad (10)$$

Bij $\theta = \frac{\pi}{2}$ is $\sin \theta = 1$ zodat:

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L. \quad (11)$$

Hieruit volgen de behouden grootheden: E en L , de energie en het impulsmoment per eenheid massa. Voor fotonen zijn dit respectievelijk de energie en het impulsmoment zelf. (meer over het impulsmoment, zie [Appendix 8.](#))

Merk op dat vergelijking (11) het equivalent is van Keplers tweede wet binnen de algemene relativiteit: gelijke oppervlakken worden in gelijke tijden doorlopen.

Alternatieve afleiding:

Hoewel Asaf Pe'er opmerkt dat het oplossen van de volledige set gekoppelde geodetische vergelijkingen complex lijkt, blijkt dat een aantal van deze vergelijkingen relatief eenvoudig oplosbaar zijn. We zullen dit aantonen door gebruik te maken van de vergelijkingen (3.2.1) en (3.2.4).

We beginnen met vergelijking (3.2.1):

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + 2 \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0$$

Waarbij

$$\sigma^2 = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 - \frac{R_s}{r}$$

We vermenigvuldigen beide zijden met σ^2 :

$$\begin{aligned} \sigma^2 \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{R_s}{r^2} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} &= 0 \\ \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{R_s}{r^2} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

We herschrijven dit:

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{R_s}{r^2} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \frac{R_s}{r} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} = 0$$

Of:

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dt}{d\lambda} - \frac{R_s}{r} \frac{dt}{d\lambda} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{dt}{d\lambda} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \right] = 0$$

Dit toont aan dat de uitdrukking

$$\frac{dt}{d\lambda} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right)$$

constant is langs de wereldlijn. We herkennen hierin de behouden grootheid die gerelateerd is aan de totale energie per massa-eenheid van het deeltje. Vermenigvuldiging met c geeft:

$$\frac{cdt}{d\lambda} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) = \text{constant} = \frac{E}{c} \quad (\text{total energy}) \quad (9)$$

We gaan nu verder met vergelijking (3.2.4). Om de afleiding te vereenvoudigen, nemen we aan dat het deeltje zich beweegt in het equatoriale vlak, zodanig $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dan wordt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} &= 0 \\ \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

We herschrijven dit als:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0$$

Wat betekent dat ook:

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}$$

een constante is langs de geodetische wereldlijn. Deze constante herkennen we als het impulsmoment per eenheid massa. Dus:

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = \text{constant} = L \text{ (impulsmoment)} \quad (11)$$

3.2.1 Het Gravitatiepotentiaal

Met de eerder afgeleide behoudswetten kunnen we nu de beweging van deeltjes in de Schwarzschild-metrick verder analyseren. We beginnen met het uitschrijven van vergelijking (6), waarbij we gebruikmaken van de behouden grootheden uit vergelijkingen (10) en (11):

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = c^2 \varepsilon. \quad (12)$$

Invullen van de behouden grootheden E en L geeft:

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \frac{L^2}{r^2} = c^2 \varepsilon$$

We vermenigvuldigen deze vergelijking met $\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$ en gebruiken $E/c = c \frac{dt}{d\lambda} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$ en $L = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}$ om te herschrijven:

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + c^2 \varepsilon\right) = 0$$

Invullen van de uitdrukking voor E leidt tot:

$$\frac{E^2}{c^2} - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + c^2 \varepsilon\right) = 0. \quad (13)$$

We zijn hiermee in staat geweest om de vier gekoppelde geodetische vergelijkingen te reduceren tot één differentiaalvergelijking voor $r(\lambda)$. Dit betekent een grote vereenvoudiging van het probleem.

We herschrijven vergelijking (13) in de volgende vorm:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = \frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2}. \quad (14)$$

met de effectieve potentiaal $V(r)$ gedefinieerd als:

$$V(r) = \frac{1}{2}c^2\varepsilon - \varepsilon\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{c^2r^3}. \quad (15)$$

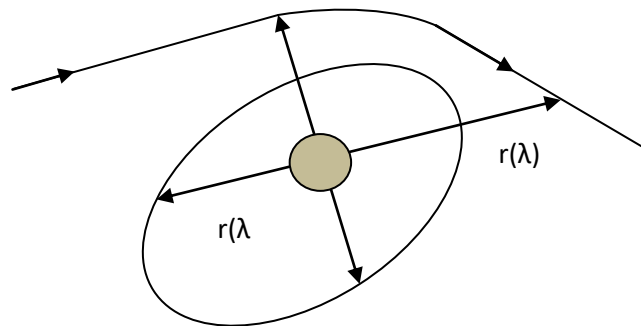
Vergelijking (14) is formeel identiek aan de klassieke vergelijking voor de beweging van een deeltje (met eenheidsmassa) in een één-dimensionaal potentiaal $V(r)$, waarbij de totale “energie” $\frac{1}{2}\frac{E^2}{c^2}$ is. Natuurlijk is de werkelijke energie E , maar deze vorm maakt de vergelijking analoog aan de klassieke mechanica. De eerste term stelt de kinetische energie voor, de tweede het potentiaal, en hun som is constant..

Als we het potentiaal $V(r)$ in vergelijking (15) analyseren, zien we dat het slechts op één punt verschilt van het Newtoniaanse potentiaal: de laatste term. Deze term, die evenredig is met $1/r^3$, vertegenwoordigt een puur relativistische correctie en speelt vooral bij kleine r een belangrijke rol.

De termen kunnen als volgt geïnterpreteerd worden:

- De eerste term is constant (afhankelijk van $\varepsilon = 1$ voor massieve deeltjes en $\varepsilon = 0$ voor fotonen),
- De tweede term is het Newtoniaanse gravitationele potentiaal,
- De derde term is het klassieke impulsmomentpotentiaal,
- De vierde term is de relativistische correctie.

Let op: ondanks de vormelijke overeenkomst met klassieke mechanica beschrijft dit géén deeltje dat vrij in één dimensie beweegt. In werkelijkheid gaat het hier om een deeltje dat in een baan rond een massief object beweegt. De grootheden van belang zijn $r(\lambda)$, maar ook $t(\lambda)$ en $\phi(\lambda)$, die samen het ruimtetijdtraject beschrijven (zie Figuur 1).



Figuur 1 — Trajecten van deeltjes in een gravitationeel potentiaal.

3.2.2 Intermezzo over Energie.

In dit intermezzo analyseren we de vorm van de energie zoals afgeleid in vergelijking (3.2.9) van hoofdstuk (3.2). Deze energie is een behouden grootheid in de Schwarzschild-geometrie.

We beginnen bij de relatie:

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{mc^2} = \sigma^2 \frac{dt}{d\lambda}, \quad (9)$$

Waaruit volgt:

$$E = \sigma^2 mc^2 \frac{dt}{d\lambda}$$

De Schwarzschild-metrik luidt:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2$$

Om de situatie rond het beginpunt $\tau = 0$ te vermijden, gebruiken we een affiene parameter λ , met $d\tau = d\lambda$. Vervolgens beperken we ons tot het equatoriale vlak ($\theta = \pi/2$), waardoor de metrik vereenvoudigt.

De norm van de 4-snelheid geeft dan:

$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = c^2 \varepsilon.$$

Door te herschrijven naar snelheden ten opzichte van de coördinaattijd t , verkrijgen we:

$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = c^2 \varepsilon$$

Voor deeltjes met massa geldt $\varepsilon = 1$:

$$\sigma^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{\sigma^{-2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}{\sigma^2 c^2}\right) = \varepsilon = 1 \quad (9a)$$

$$\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{\sigma^2 c^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2}$$

Waaruit volgt:

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sigma \sqrt{1 - \frac{v^2}{\sigma^2 c^2}}}$$

Waarbij $v^2 = \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$ de totale snelheid is. In combinatie met de energie (vergelijking 9) leidt dit tot:

$$E = \sigma^2 m c^2 \frac{dt}{d\lambda}$$

Dus:

$$E = \frac{\sigma m c^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{\sigma^2 c^2}\right)}}$$

$$E = \gamma_\sigma \sigma m c^2$$

Deze uitdrukking geeft de totale behouden energie. Hieruit kunnen we drie componenten onderscheiden:

- **Rustenergie:** $E = \sigma m c^2$
- **Relativistische kinetische energie:**

$$E_{kin} = \sigma m c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{\sigma^2 c^2}\right)}} - 1 \right]$$

In het niet-relativistische limiet $v \ll c$, en met een eerste-orde-Taylorontwikkeling van de wortel, vinden we de “kinetische” energie:

$$E_{kin} \approx \sigma m c^2 \left[1 + \frac{v^2}{2\sigma^2 c^2} - 1 \right] = \frac{m v^2}{2\sigma}$$

Alternatieve benadering via de metriek

Begin met de Schwarzschild-vergelijking:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2$$

$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = c^2 \varepsilon$$

Vermenigvuldig met σ^2 :

$$\sigma^4 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \sigma^2 r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = \sigma^2 c^2 \varepsilon$$

Gebruik opnieuw:

$$E = \sigma^2 m c^2 \frac{dt}{d\lambda} \Rightarrow \frac{E}{m c} = \sigma^2 c \frac{dt}{d\lambda}$$

En schrijf:

$$\left(\frac{E}{mc}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \sigma^2 r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 + \sigma^2 c^2 \varepsilon$$

Stel

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{m} \Rightarrow r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = \frac{L^2}{r^2 m^2} = \frac{(mv_t r)^2}{r^2 m^2} = v_t^2$$

Nu nemen we $\lambda = \tau$ en $\varepsilon = 1$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{E}{mc}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \sigma^2 v_t^2 + \sigma^2 c^2 = v_r^2 + \sigma^2 v_t^2 + \sigma^2 c^2 \\ \left(\frac{E}{c}\right)^2 &= m^2 v_r^2 + m^2 \sigma^2 v_t^2 + m^2 \sigma^2 c^2 \end{aligned}$$

Waar

$$v_r = \frac{dr}{d\tau}, \text{ en } v_t = r \frac{d\phi}{d\tau}$$

De termen in deze uitdrukking interpreteren we als volgt:

- mv_r : radiale impuls
- $m\sigma v_t$: transversale impuls
- σmc^2 : rustenergie

De kinetische energie is dan:

$$E_{kin} = mc \sqrt{v_r^2 + \sigma^2 v_t^2}$$

Derde benadering: via een relativistische energie-impulsrelatie

Start opnieuw met de norm van de 4-snelheid:

$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = c^2 \varepsilon$$

Waaruit volgt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{E}{\sigma c}\right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 &= c^2 \varepsilon \\ \left(\frac{E}{\sigma c}\right)^2 - p^2 &= c^2 \varepsilon \Rightarrow \left(\frac{E}{\sigma c}\right)^2 = c^2 \varepsilon + p^2 \end{aligned}$$

Schrijf dit als:

$$E^2 = \sigma^2 c^4 \varepsilon + \sigma^2 p^2 c^2$$

waar p het totale ruimtelijke momentum per eenheid massa is. In rust volgt $E = \sigma m c^2$, voor een foton $E = \sigma p c$, en in het algemeen

Of:

$$E^2 = \sigma^2 m^2 c^4 \varepsilon + \sigma^2 m^2 c^2 U^2$$

waarbij

$$U^2 = (dx^\mu/d\tau)^2 = \sigma^{-2} (dr/d\tau)^2 + r^2 (d\phi/d\tau)^2$$

de kwadratische norm is van de ruimtelijke snelheid. Voor massieve deeltjes ($\varepsilon = 1$) en eenheid massa wordt dit:

$$E^2 = \sigma^2 c^4 + \sigma^2 c^2 U^2$$

3.2.3 Experiment 3 - Afbuiging van Licht

Historische en theoretische achtergrond

De afbuiging van licht door zwaartekracht was de eerste experimentele toets van de algemene relativiteitstheorie. In de klassieke Newtoniaanse zwaartekracht beweegt licht, als massaloos verschijnsel, in rechte lijnen die niet door zwaartekracht worden beïnvloed. Volgens de algemene relativiteitstheorie echter, volgt licht de kromming van de ruimtetijd, veroorzaakt door massa. Daardoor wijkt een lichtstraal af van een rechte lijn wanneer zij passeert langs een massief object zoals de zon.

Dit effect kan waargenomen worden wanneer men kijkt naar het licht van een ster die zich visueel dicht bij de zon bevindt. Wanneer het licht van de ster langs de zon schampt, wordt het afgebogen, zodat de ster op een andere plaats aan de hemel lijkt te staan dan waar zij zich werkelijk bevindt. Een half jaar later, als de ster zich aan de andere kant van de hemel bevindt, zal haar licht de zon op grote afstand passeren, en wordt haar positie correct waargenomen.

Om dit effect zichtbaar te maken is een zonsverduistering nodig, omdat het zonlicht anders het sterlicht overstraalt. In 1919 werd dit effect voor het eerst gemeten door Arthur Eddington tijdens een totale zonsverduistering. Zijn waarnemingen bevestigden Einsteins voorspelling, en betekenden een grote doorbraak in de acceptatie van de algemene relativiteitstheorie.

De afleiding van de afbuigingshoek

We beschouwen een lichtstraal (foton) die nadert vanuit het oneindige en langs de zon beweegt. De beweging van het foton in de Schwarzschild-ruimte wordt beschreven door de effectieve energievergelijking, zoals afgeleid in hoofdstuk [3.2.1](#) (vergelijkingen [3.2.1.14](#) en [3.2.1.15](#)). Voor een foton geldt $\varepsilon = 0$, zodat:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V(r) = \frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2}. \quad (14)$$

Samen met:

$$V(r) = \frac{1}{2} c^2 \varepsilon - \varepsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{c^2 r^3} \quad (15)$$

Invoegen in (14) en wetende dat voor een foto geldt $\varepsilon = 0$, geeft :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{c^2 r^3} = \frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2}.$$

We delen deze uitdrukking door L^2 en vermenigvuldigen met 2:

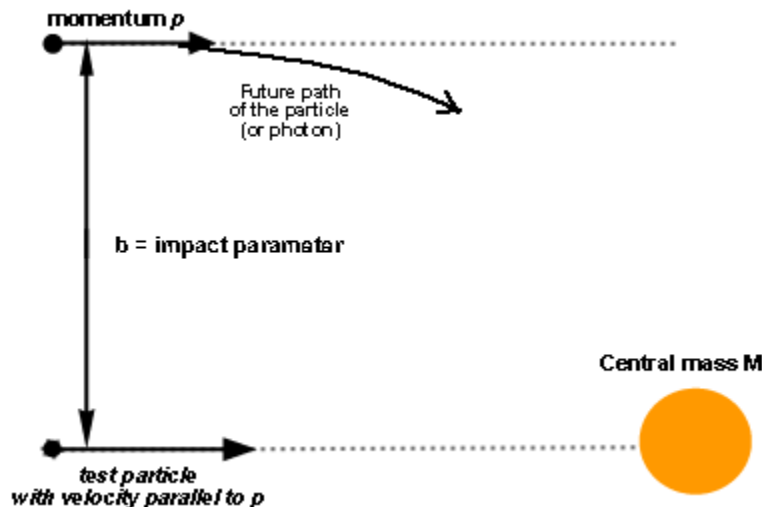
$$\begin{aligned} \frac{1}{L^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2GM}{c^2 r^3} &= \frac{E^2}{c^2 L^2}. \\ \frac{1}{L^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) &= \frac{E^2}{c^2 L^2} \end{aligned}$$

Isoleren van $(dr/d\lambda)^2$ levert:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = L^2 \left[\frac{E^2}{c^2 L^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right] \quad (16)$$

Impactparameter en impulsmoment

De impactparameter b is de afstand tussen de zwaartelijns van het massieve object (de zon) en de asymptotische richting van de lichtstraal op oneindig (zie figuur 2).



Figuur 2. Definitie van de impactparameter b . Het bewegende deeltje nadert de massa M vanuit een grote afstand met vector-moment p . Een testdeeltje met een parallelle snelheid duikt radiaal op de massa M af. De afstand b tussen hun aanvankelijk parallelle paden in het 'oneindige' is de impactparameter b .

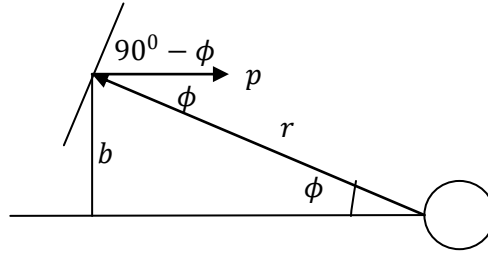
Het impulsmoment L van het foton is dan:

$$L = pb \quad (17)$$

De energie in het algemeen is $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$; terwijl voor een foton geldt $m=0$, dus $E=pc$, zodat:

$$b = \frac{L}{E/c} \quad (18)$$

Extra verduidelijking van de relatie (17) en (18):



Het impulsmoment is $L = p \sin \phi \cdot r = p \cdot r \sin \phi = p \cdot b$

De energie in het algemeen is $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$; en voor een foton geldt $m=0$, dus $E=pc$.

Dus:

$$\frac{L}{E/c} = \frac{pb}{pc/c} = b$$

Hieruit kunnen we ook afleiden dat:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{E^2}{c^2 L^2} \quad (18a)$$

Afleiding van het pad: de baanvergelijking

Gebruikmakend van vergelijking 9.11, $(r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L)$ vinden we:

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{d\phi}{dr} \frac{dr}{d\lambda} = \frac{L}{r^2} \Rightarrow \frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{r^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^{-1}$$

Samen met (16) levert dit:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{r^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^{-1} = \pm \frac{L}{r^2} \frac{1}{L} \left[\frac{E^2}{c^2 L^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right]^{-1/2}$$

Met (18a) wordt dit:

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right]^{-1/2} \quad (19)$$

Dit leidt tot de differentiaalvergelijking:

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \quad (20)$$

De integratie van het pad

De afbuigingshoek wordt verkregen door de hoekverandering $\Delta\phi$ langs het traject van het foton te berekenen, van oneindig tot aan het perihelium $r=R$, en weer terug. Vanuit (19) krijgen we:
(Zie Figuur 3).

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (21)$$

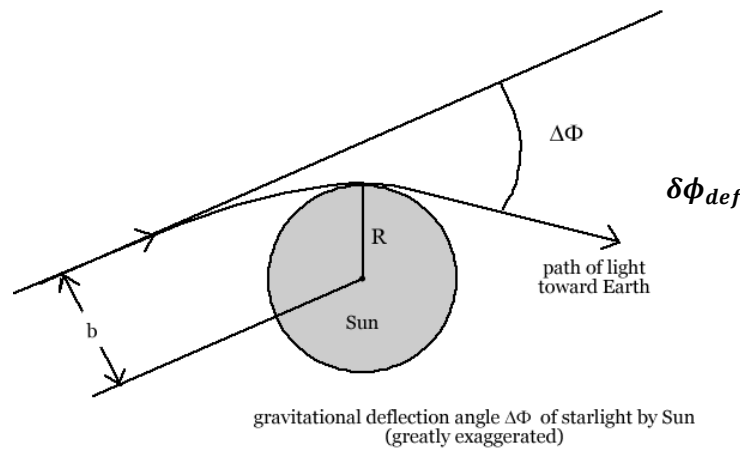


Fig. 3— Afbuiging van licht door hoek $\delta\phi_{def}$

Op het keerpunt $r = R$ geldt $dr/d\phi = 0$, zodat uit (20) volgt:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) \quad (22)$$

Vervang dit in (20):

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \quad (23)$$

Variabele substitutie

Voer de volgende substitutie uit::

$$u = \frac{R}{r}$$

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\phi} = \frac{-R}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \Rightarrow \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{R}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2$$

Waarbij u varieert tussen 1 ($r=R$) en 0 ($r=\infty$). Vergelijking (23) wordt dan:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) - u^2 \left(1 - \frac{2GMu}{c^2 R}\right)$$

Of:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 1 - u^2 - \frac{2GM}{c^2 R}(1 - u^3) \quad (24)$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} d\phi &= \left[1 - u^2 - \frac{2GM}{c^2 R}(1 - u^3)\right]^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{(1 - u^2)^{-1/2}}{\left[1 - \frac{2GM}{c^2 R}(1 - u^3)(1 - u^2)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}} du \end{aligned} \quad (25)$$

Deze integraal is lastig op te lossen in gesloten vorm. Om haar eenvoudiger te maken, gebruiken we de substitutie:

$$u = \cos \alpha \text{ met } 0 < \alpha < \pi/2 \text{ dus } 0 < u < 1$$

Dan wordt:

$$d\phi = - \left[1 - \frac{2GM}{c^2 R}(1 - \cos^3 \alpha) \sin^{-2} \alpha\right]^{-\frac{1}{2}} d\alpha \quad (26)$$

Door in te zien dat:

$$\frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} = \frac{1 + \cos \alpha (1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)} = \cos \alpha + \frac{1}{(1 + \cos \alpha)}$$

Krijgen we uiteindelijk:

$$d\phi = - \left[1 - \frac{2GM}{c^2 R} \left(\cos \alpha + \frac{1}{(1 + \cos \alpha)}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} d\alpha \quad (27)$$

Met:

$$\cos \alpha = R/r$$

Tot op dit punt is **geen enkele benadering** toegepast. Deze volledige afleiding is geschikt om de lichtafbuiging exact te berekenen, al is in de praktijk vaak een eerste-orde benadering voldoende om de afbuigingshoek langs de rand van de zon te bepalen.

3.2.3.1 Benaderingen en Integratie.

De waarde van de parameter

$$\frac{2GM}{c^2 R} \approx 4.24 \cdot 10^{-6}$$

is zeer klein aan het oppervlak van de zon. Hierdoor kunnen we gebruikmaken van een benadering om de integraal in vergelijking (27) op te lossen.

We passen de bekende Taylor-benadering toe:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k}} \approx 1 + \frac{1}{2}k \quad \text{voor kleine } k$$

Toegepast op vergelijking (27) levert dit:

$$d\phi = - \left[1 - \frac{2GM}{c^2 R} \left(\cos \alpha + \frac{1}{(1 + \cos \alpha)} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} d\alpha$$

Of:

$$d\phi = - \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{2GM}{c^2 R} \left(\cos \alpha + \frac{1}{(1 + \cos \alpha)} \right) \right]}} d\alpha$$

Na benadering:

$$d\phi \approx - \left[1 + \frac{GM}{c^2 R} \left(\cos \alpha + \frac{1}{(1 + \cos \alpha)} \right) \right] d\alpha \quad (28)$$

We kunnen nu de totale verandering in het azimut berekenen langs het volledige traject van het foton, van $\alpha = 0$ tot $\alpha = \frac{\pi}{2}$, en dit verdubbelen:

$$\Delta\phi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \frac{GM}{c^2 R} \left(\cos \alpha + \frac{1}{(1 + \cos \alpha)} \right) \right] d\alpha \quad (29)$$

Om deze integraal uit te werken, bekijken we de tweede term apart:

Om de integraal

$$\int \frac{1}{1 + \cos \alpha} d\alpha$$

We gebruiken de goniometrische identiteit:

$$1 + \cos \alpha = 1 + \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

Dus:

$$\frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Merk op dat:

$$\frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{d\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)}{d\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{d\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)}{d\alpha}$$

Dus

$$\int \frac{1}{1 + \cos\alpha} d\alpha = \tan\frac{\alpha}{2}$$

Nu kunnen we de volledige integraal (29) evalueren:

$$\Delta\phi = 2 \left[\alpha + \frac{GM}{c^2 R} \left(\sin\alpha + \tan\frac{\alpha}{2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad (30)$$

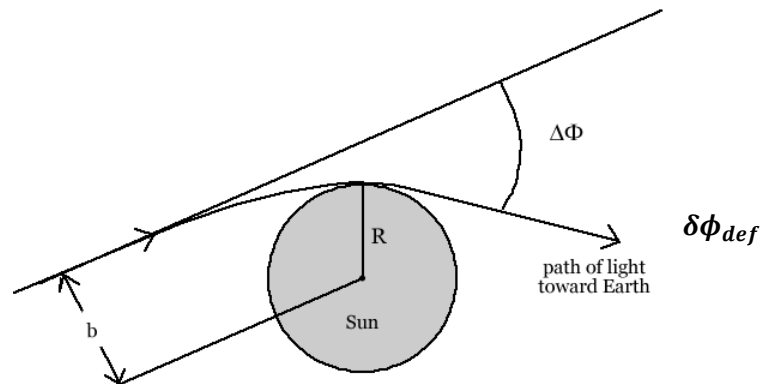
We vullen in:

- $\alpha = \frac{\pi}{2}$: $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
- $\alpha = 0$: $\sin(0) = 0, \tan(0) = 0$

Dus:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{GM}{c^2 R} (1 + 1) \right] = \pi + \frac{4GM}{c^2 R} \\ \Delta\phi &= \pi + \frac{4GM}{c^2 R} \end{aligned} \quad (31)$$

Opmerking: de integraal zou van $r = \infty$ naar R moeten gaan, dus nu gaat u van 0 naar 1, en dus α van $\frac{\pi}{2}$ naar 0. Door de integraal te veranderen naar 0 tot $\frac{\pi}{2}$ verandert het teken en verdwijnt het minteken.



gravitationele afbuigingshoek $\delta\phi_{def}$ van het sterrenlicht door de Zon

De eerste term, π , is de totale hoekverandering van een foton in een vlakke ruimtetijd – een rechte baan zonder afbuiging. De tweede term is de extra afbuiging ten gevolge van de kromming van de ruimtetijd. De werkelijke afbuigingshoek is dus:

$$\delta\phi_{def} = \Delta\phi - \pi \approx \frac{4GM}{c^2 R} \quad (32)$$

Numerieke waarde

Met:

- $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
- $M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
- $c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
- $R_{\odot} = 6.963 \cdot 10^8 \text{ m}$

vinden we:

$$\delta\phi_{def} = \frac{4 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}}{(3.00 \cdot 10^8) \cdot 6.963 \cdot 10^8} \approx 8.5 \cdot 10^{-6} \text{ radialen}$$

Om dit om te zetten in boogseconden, gebruiken we:

$$1 \text{ rad} = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi} \approx 206.265''$$

Daaruit volgt:

$$\delta\phi_{def} \approx 8.5 \cdot 10^{-6} \cdot 206.265 \approx 1.75''$$

Conclusie

Deze afbuiging van 1.75 boogseconde werd voor het eerst waargenomen door Arthur Eddington tijdens de zonsverduistering van 1919. Het resultaat bevestigde op spectaculaire wijze Einsteins voorspelling, en betekende een mijlpaal in de experimentele bevestiging van de algemene relativiteitstheorie.

Dit effect is ook te zien buiten ons zonnestelsel, en staat bekend als “gravitational lensing”.

3.2.4 Experiment 4 - Precessie van de Periheliën (Mercurius)

Gebaseerd op artikel van Owen Biesel ([Biesel, 2008](#)).

Inleiding

In de algemene relativiteitstheorie beschouwen we een planeet zoals Mercurius als een testdeeltje dat zich langs een geodetische baan beweegt door de gekromde ruimtetijd. De Schwarzschild-metriek beschrijft deze ruimtetijd rondom een sferisch symmetrische massa (zoals de zon) en luidt:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (33)$$

met:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}, \text{ waarbij } R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Voor een planeet die beweegt in het equatoriale vlak ($\theta = \frac{\pi}{2}$) vereenvoudigt dit tot:

$$1 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$$

Afleiding via de Lagrange-aanpak (zie Appendix 10)

Hoewel we eerder al de uitdrukkingen voor de energie E (vergelijking 3.2 9) en het impulsmoment L (vergelijking 3.2 11) hebben afgeleid, herhalen we hier de afleiding vanuit de Lagrangiaan. We parameteriseren de baan als $x^\mu(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau))$ met τ de eigentijd. In het equatoriale vlak ($\theta = \pi/2$) wordt de Lagrangiaan:

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \quad (34)$$

De Euler-Lagrange-vergelijkingen voor ϕ en t geven:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \dot{\phi} \text{ en } \frac{dt}{d\tau} = \dot{t}$$

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{1}{c^2} r^2 \dot{\phi}^2$$

Euler-Lagrange operatie:

$$\text{Hier is voor } \phi: \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

$$\text{en voor } t: \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

Dan geldt voor de Euler-Lagrange-vergelijkingen voor ϕ en t :

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(2 \frac{1}{c^2} r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \right) \Rightarrow r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = \text{constant} = L$$

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \right) \Rightarrow \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = \text{constant} = \frac{E}{c^2}$$

Hieruit volgt dat L (het impulsmoment per eenheid massa) en E (de energie per eenheid massa) bewegingsconstanten zijn.

We herschrijven de oorspronkelijke normvoorwaarde:

$$1 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$$

en substitueren de constanten E en L erin:

$$1 = \frac{\frac{E^2}{c^4}}{1 - \frac{R_s}{r}} - \frac{1}{c^2} \frac{\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - \frac{1}{c^2} \frac{L^2}{r^2}$$

$$1 - \frac{R_s}{r} = \frac{E^2}{c^4} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \frac{L^2}{r^2} + \frac{1}{c^2} \frac{L^2}{r^2} \frac{R_s}{r}$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) + c^2 \frac{R_s}{r} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{R_s L^2}{r^3}$$

Door:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{L}{r^2} \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r^4}{L^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$$

Verkrijgen we:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r^4}{L^2} \left[c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) + \frac{c^2 R_s}{r} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{R_s L^2}{r^3} \right]$$

Na vereenvoudiging:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{c^2}{L^2} \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) r^4 + \frac{c^2 R_s}{L^2} r^3 - r^2 + R_s r$$

Precessie van de baan

Nu legt de eis van een gesloten baan, met $\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \geq 0$, enkele beperkingen op aan L , E , en R_s ; we hebben een verbonden deel van $\left\{r: \frac{dr}{d\phi} \geq 0\right\}$ nodig dat een compact deelverzameling van $\mathbb{R}^+$ vormt. Dit betekent dat er minstens twee waarden A en P zijn waar $\frac{dr}{d\phi} = 0$, namelijk het aphelium (A) en perihelium (P). Dan wordt de hoekverschuiving van A en P gegeven, net als in het klassieke geval, door:

$$d\phi = \frac{1}{\sqrt{c^2 \frac{E^2}{c^4} - 1} r^4 + c^2 \frac{R_s}{L^2} r^3 - r^2 + R_s r}} dr$$

$$\phi_A - \phi_P = \int_P^A \frac{dr}{\sqrt{c^2 \frac{E^2}{c^4} - 1} r^4 + c^2 \frac{R_s}{L^2} r^3 - r^2 + R_s r}} \quad (35)$$

Gezien dat $(r - A)$ en $(r - P)$ factoren zijn van $c^2 \frac{E^2}{c^4} - 1 r^4 + c^2 \frac{R_s}{L^2} r^3 - r^2 + R_s r$, kunnen we $\frac{E^2}{c^4} - 1$ en $\frac{L^2}{c^2}$ oplossen in termen van A , P and R_s :

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) A^4 + (L^2)(-A^2 + R_s A) = -c^2 R_s A^3 \quad (36)$$

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) P^4 + (L^2)(-P^2 + R_s P) = -c^2 R_s P^3 \quad (37)$$

Vermenigvuldig (36) met $(-P^2 + R_s P)$

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) A^4 (-P^2 + R_s P) + (L^2)(-A^2 + R_s A)(-P^2 + R_s P) = -c^2 R_s A^3 (-P^2 + R_s P)$$

Vermenigvuldig (37) met $(-A^2 + R_s A)$

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) P^4 (-A^2 + R_s A) + (L^2)(-P^2 + R_s P)(-A^2 + R_s A) = -c^2 R_s P^3 (-A^2 + R_s A)$$

Trek deze twee vergelijkingen van elkaar af:

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) [A^4 (-P^2 + R_s P) - P^4 (-A^2 + R_s A)] = -c^2 R_s A^3 (-P^2 + R_s P) + c^2 R_s P^3 (-A^2 + R_s A)$$

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-c^2 R_s A^3 (-P^2 + R_s P) + c^2 R_s P^3 (-A^2 + R_s A)}{[A^4 (-P^2 + R_s P) - P^4 (-A^2 + R_s A)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s [A^3 (-P^2 + R_s P) - P^3 (-A^2 + R_s A)]}{[A^4 (-P^2 + R_s P) - P^4 (-A^2 + R_s A)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s [A^3 P (-P + R_s) - P^3 A (-A + R_s)]}{[A^4 P (-P + R_s) - P^4 A (-A + R_s)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s A P [A^2 (-P + R_s) - P^2 (-A + R_s)]}{A P [A^3 (-P + R_s) - P^3 (-A + R_s)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s [A^2 (-P + R_s) - P^2 (-A + R_s)]}{[A^3 (-P + R_s) - P^3 (-A + R_s)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s [-P A^2 + R_s A^2 + A P^2 - R_s P^2]}{[-P A^3 + R_s A^3 + A P^3 - R_s P^3]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s [-A P (A - P) + R_s (A^2 - P^2)]}{[-A P (A^2 - P^2) + R_s (A^3 - P^3)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s (A - P) [-A P + R_s (A + P)]}{(A - P) \left[-A P (A + P) + R_s \frac{(A^3 - P^3)}{A - P} \right]}$$

Intermezzo om $\frac{(A^3 - P^3)}{A - P}$ uit te werken:

$$(A^2 - P^2)(A + P) = A^3 - A P^2 + A^2 P - P^3$$

$$A^3 - P^3 = (A^2 - P^2)(A + P) - A P (A - P)$$

$$A^3 - P^3 = (A - P)(A + P)(A + P) - A P (A - P)$$

$$\Rightarrow \frac{A^3 - P^3}{A - P} = (A + P)^2 - A P$$

Nu vullen we het resultaat in:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) &= \frac{-R_s(A - P)[-AP + R_s(A + P)]}{(A - P)[-AP(A + P) + R_s(A + P)^2 - R_sAP]} \\
 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) &= \frac{-R_s[-AP + R_s(A + P)]}{[-AP(A + P + R_s) + R_s(A + P)^2]} \\
 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) &= \frac{R_s[-AP + R_s(A + P)]}{AP(A + P + R_s) - R_s(A + P)^2}
 \end{aligned} \tag{36a}$$

Nu kunnen we L^2/c^2 vinden door dezelfde methode toe te passen op vergelijkingen (36) en (37):

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) A^4 + (L^2)(-A^2 + R_s A) = -c^2 R_s A^3 \tag{36}$$

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) P^4 + (L^2)(-P^2 + R_s P) = -c^2 R_s P^3 \tag{37}$$

Vermenigvuldig 36 met A :

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) A^4 P^4 + (L^2)(-A^2 + R_s A) P^4 = -c^2 R_s A^3 P^4$$

Vermenigvuldig 37 met P :

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) A^4 P^4 + (L^2)(-P^2 + R_s P) A^4 = -c^2 R_s A^4 P^3$$

Nu aftrekken:

$$(L^2)[(-A^2 + R_s A)P^4 - (-P^2 + R_s P)A^4] = -c^2 R_s A^3 P^4 + c^2 R_s A^4 P^3$$

$$L^2 = \frac{c^2 R_s A^3 P^3 [-P + A]}{(-A^2 + R_s A)P^4 - (-P^2 + R_s P)A^4}$$

$$L^2 = \frac{c^2 R_s A^3 P^3 [-P + A]}{(-A + R_s)AP^4 - (-P + R_s)PA^4}$$

$$L^2 = \frac{c^2 R_s A^3 P^3 [-P + A]}{AP[(-A + R_s)P^3 - (-P + R_s)A^3]}$$

$$L^2 = \frac{c^2 R_s A^2 P^2 [-P + A]}{[(-A + R_s)P^3 - (-P + R_s)A^3]}$$

$$L^2 = \frac{c^2 R_s A^2 P^2 [-P + A]}{A^3 P - AP^3 - (A^3 - P^3)R_s}$$

$$L^2 = \frac{c^2 R_s A^2 P^2 [-P + A]}{AP(A^2 - P^2) - (A^3 - P^3)R_s}$$

$$L^2 = \frac{c^2 R_s A^2 P^2}{AP(A + P) - R_s(A + P)^2 + APR_s}$$

$$L^2 = \frac{c^2 R_s A^2 P^2}{AP(A + P + R_s) - R_s(A + P)^2}$$

$$\frac{L^2}{c^2} = \frac{R_s A^2 P^2}{AP(A + P + R_s) - R_s(A + P)^2}$$

Uiteindelijk krijgen we de vergelijking (36a) van boven en de vergelijking van $\frac{L^2}{c^2}$:

$$\frac{E^2}{c^4} - 1 = \frac{-APR_s + (A + P)R_s^2}{AP(A + P + R_s) - R_s(A + P)^2}$$

$$\frac{L^2}{c^2} = \frac{A^2 P^2 R_s}{AP(A + P + R_s) - R_s(A + P)^2}$$

Vervolgens kunnen we de variabele:

$$D = \frac{AP}{A + P}$$

introduceren om de uitdrukkingen verder te vereenvoudigen. Dit heeft de dimensie van afstand.

Dan wordt de uitdrukking hierboven voor $E^2 - 1$ en L^2 :

$$\frac{E^2}{c^4} - 1 = \frac{(-R_s/AP) + (R_s^2/DAP)}{\frac{1}{D} + \left(\frac{R_s}{AP}\right) - \left(\frac{R_s}{D^2}\right)}$$

$$\frac{L^2}{c^2} = \frac{R_s}{\frac{1}{D} + \left(\frac{R_s}{AP}\right) - \left(\frac{R_s}{D^2}\right)}$$

$$\frac{\frac{L^2}{c^2}}{\frac{E^2}{c^4} - 1} = \frac{R_s}{(-R_s/AP) + (R_s^2/DAP)} = \frac{AP}{-1 + R_s/D}$$

$$\frac{\frac{L^2}{c^2 AP}}{1 - \frac{E^2}{c^4}} = \frac{1}{1 - R_s/D} \quad (38)$$

We willen een uitdrukking voor ϵ , de derde niet-nul wortel van:

$$\frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} r^4 + \frac{R_s}{L^2/c^2} r^3 - r^2 + R_s r = 0$$

$$\frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} \left[r^4 + \frac{R_s}{\frac{E^2}{c^4} - 1} r^3 - \frac{\frac{L^2}{c^2}}{\frac{E^2}{c^4} - 1} r^2 + \frac{\frac{L^2}{c^2}}{\frac{E^2}{c^4} - 1} R_s r \right] = 0$$

Dit geeft dus de drie niet-nul wortels: A, P and ϵ .

De volledige uitdrukking wordt:

$$\frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} (r - A)(r - P)(r - \varepsilon)r$$

Laten we de vier factoren uitwerken:

$$\frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} [r^4 - (A + P + \varepsilon)r^3 + \{AP + \varepsilon(A + P)\}r^2 - \varepsilon AP r]$$

We weten dat de som van de drie niet-nulwortels gelijk is aan $\frac{R_s}{E^2/c^4 - 1}$ (de coëfficiënt van r^3 in de standaardvorm van het polynoom); daarom verkrijgen we:

$$-(A + P + \varepsilon) = R_s \frac{1}{E^2/c^4 - 1}$$

Dit stelt ons in staat om de relatie tussen de wortels A , P en ε verder te analyseren in termen van R_s , de Schwarzschildstraal, en de energie- en impulsmomenttermen.

Uit bovenstaande weten we dat:

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) = \frac{R_s[-AP + (A + P)R_s]}{AP(A + P + R_s) - R_s(A + P)^2}$$

Dus we vullen dit in de bovenstaande vergelijking:

$$\begin{aligned} A + P + \varepsilon &= R_s \frac{-1}{E^2/c^4 - 1} \\ A + P + \varepsilon &= R_s \frac{-AP(A + P + R_s) + R_s(A + P)^2}{R_s[-AP + (A + P)R_s]} = \frac{-AP(A + P + R_s) + R_s(A + P)^2}{-AP + (A + P)R_s} \\ \varepsilon &= \frac{-AP(A + P + R_s) + R_s(A + P)^2}{-AP + (A + P)R_s} - (A + P) \\ &= \frac{-AP(A + P + R_s) + R_s(A + P)^2 + AP(A + P) - (A + P)^2 R_s}{-AP + (A + P)R_s} \\ \varepsilon &= \frac{-AP(A + P + R_s) + AP(A + P)}{-AP + (A + P)R_s} = \frac{-APR_s}{-AP + (A + P)R_s} = \frac{R_s}{1 - \frac{(A + P)R_s}{AP}} = \frac{R_s}{1 - \frac{R_s}{D}} \end{aligned}$$

Wat geeft:

$$\varepsilon = \frac{R_s}{1 - \frac{R_s}{D}} \quad (39)$$

Nu kunnen we (35) benaderen door te schrijven

$$\frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} r^4 + \frac{R_s}{L^2/c^2} r^3 - r^2 + R_s r = \frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} (r - A)(r - P)(r - \varepsilon)r$$

$$= \frac{1 - E^2/c^4}{L^2/c^2} (A - r)(r - P)(r - \varepsilon)r.$$

We verkrijgen:

$$\begin{aligned}\phi_A - \phi_P &= \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \int_P^A \frac{1}{\sqrt{r(A - r)(r - P)(r - \varepsilon)}} dr \\ &= \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \int_P^A \frac{1}{\sqrt{r^2(A - r)(r - P) \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)}} dr \\ &= \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \int_P^A \frac{1}{r \sqrt{(A - r)(r - P)}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^{-1/2} dr\end{aligned}$$

Nu gebruiken we de Taylorreeksontwikkeling $\left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2r}$, met een fout ε begrensd door:

$$|\varepsilon| \leq \frac{3}{8} \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^{-5/2} \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2 \leq \frac{3}{8} \left(1 - \frac{\varepsilon}{A}\right)^{-5/2} \left(\frac{\varepsilon}{P}\right)^2$$

wat produceert:

$$= \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \int_P^A \left[\frac{1}{r \sqrt{(A - r)(r - P)}} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{r^2 \sqrt{(A - r)(r - P)}} \right] dr \quad (40)$$

Opmerking: In zijn artikel "The Precession of Mercury's Perihelion" van Owen Biesel (25 januari 2008), op pagina 8, daar bevat het linkerdeel van de integraal (40) in de teller $1 + \varepsilon$, maar wij zijn van mening dat het alleen 1 moet zijn en hebben de formule dienovereenkomstig aangepast.

De **eerste integraal van (40)** (uitwerking zie [3.2.4.1](#) en [3.2.4.3](#)) in gesloten vorm:

$$\begin{aligned}&= \int_P^A \frac{1}{r \sqrt{(A - r)(r - P)}} dr \\ &= \frac{1}{\sqrt{AP}} \arctan \left[\frac{(A - r)(r - P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A - r)(r - P)AP}} \right]_P^A \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{AP}} [\arctan[+\infty] - \arctan[-\infty]] = \frac{1}{\sqrt{AP}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{AP}} \pi\end{aligned}$$

De **tweede integraal van (40)** (uitwerking zie [3.2.4.2](#)) is lastiger, maar kan in gesloten vorm worden geëvalueerd:

$$\int_P^A \frac{\varepsilon/2}{r^2 \sqrt{(A - r)(r - P)}} dr = \frac{\pi \varepsilon/2}{2\sqrt{AP}} \frac{A + P}{AP} = \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{\pi \varepsilon}{4D}$$

Als we nu herkennen dat:

$$\frac{L^2/c^2 AP}{1 - E^2/c^4} = \frac{1}{1 - R_s/D}$$

en:

$$\varepsilon = \frac{R_s}{1 - R_s/D}$$

(zie (38) en (39) hierboven), dan vinden we dat:

$$\begin{aligned}\phi_A - \phi_P &= \frac{1}{\sqrt{AP}} \pi \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} + \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{\pi \varepsilon}{4D} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \\ \phi_A - \phi_P &= \pi \sqrt{\frac{L^2/c^2 AP}{1 - E^2/c^4}} + \frac{\pi \varepsilon}{4D} \sqrt{\frac{L^2/c^2 AP}{1 - E^2/c^4}} = \pi \sqrt{\frac{1}{1 - R_s/D}} + \frac{\pi \varepsilon}{4D} \sqrt{\frac{1}{1 - R_s/D}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{1 - R_s/D}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4D}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{1 - R_s/D}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{1}{1 - R_s/D} \frac{R_s}{D}\right) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{1 - R_s/D}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{R_s/D}{1 - R_s/D}\right)\end{aligned}$$

Met de waargenomen waarden $A(\text{phelion}) = 69.8 \cdot 10^6 \text{ km}$, en $P(\text{erihelion}) = 46.0 \cdot 10^6 \text{ km}$, verkrijgen we:

$$D = 27.7 \cdot 10^6 \text{ km}, \text{ en } R_s = \frac{2GM}{c^2} = 2.95 \text{ km}$$

En kunnen we de term als volgt benaderen:

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 - R_s/D}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{R_s/D}{1 - R_s/D}\right) \approx \pi + 2.512 \cdot 10^{-7}$$

Dit levert een betrouwbare schatting van $\phi_A - \phi_P$ op (een halve omwenteling, in radialen).

Dit geeft:

$$\Delta\phi = 2.512 \cdot 10^{-7} \text{ radialen voor een halve omwenteling}$$

En

$$\Delta\phi = 5.024 \cdot 10^{-7} \text{ radialen voor een hele omwenteling}$$

De omlooptijd van Mercurius is 87,969 dagen, dus Mercurius voltooit 415,2 omwentelingen per eeuw.

Aangezien er $360 \cdot 60 \cdot 60 / 2\pi$ boogseconden per radiaal zijn, vinden we dat het perihelium van Mercurius verschuift met:

$$\Delta\phi = (5.024 \cdot 10^{-7}) \left(\frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi}\right) \cdot 415.2 = 43.027 \text{ boogseconden per eeuw.}$$

$$\Delta\phi = \mathbf{43.027 \text{ boogseconden per eeuw.}}$$

Opmerking: Volgens Asaf Pe'er, voor een kleine afbuigingshoek, geeft het resultaat (zie vergelijking 6 hoofdstuk 3.5):

$$\delta\phi_{prec} = \frac{6\pi GM_{\text{sun}}}{c^2 a(1 - \varepsilon^2)} \quad (41)$$

Waarbij a de halve lange as is en ε de excentriciteit. Het effect is het grootst voor kleine a . Voor Mercurius voorspelt dit 43 boogseconden per eeuw, wat consistent is met waarnemingen.

Dit geeft ons de exacte relatie voor de precessiehoek van de baan van Mercurius, zoals beschreven in het resultaat van 43.027 boogseconden per eeuw.

3.2.4.1 We Controleren de Eerste Integraal.

Controle van de integrand:

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{\sqrt{AP}} \arctan \left[\frac{(A-r)(r-P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right] \right\} \stackrel{?}{=} \frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}}$$

We weten dat:

$$\frac{d\arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

Daarom:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{d}{dr} \left\{ \arctan \left[\frac{(A-r)(r-P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right] \right\} &= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{1}{1 + \left[\frac{(A-r)(r-P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right]^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{(A-r)(r-P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{(A-r)(r-P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \left[\frac{-(r-P) + (A-r) + 2r}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{AP\{(A-r)(r-P) + r^2 - AP\}\{-(r-P) + (A-r)\}}{4\{(A-r)(r-P)AP\}^{3/2}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \left[\frac{A+P}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{AP\{Ar - AP - r^2 + rP + r^2 - AP\}\{-r + P + A - r\}}{4\{(A-r)(r-P)AP\}^{3/2}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \left[\frac{A+P}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} - \frac{AP\{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4\{(A-r)(r-P)AP\}^{3/2}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \left[\frac{2(A+P)}{4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{AP\{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4(A-r)(r-P)AP} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} * \\
&\quad \left[\frac{2(A+P)(A-r)(r-P)AP - AP\{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4(A-r)(r-P)AP} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{2(A+P)(A-r)(r-P)AP - AP\{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \\
&= \frac{1}{AP\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{2(A+P)(A-r)(r-P)AP - AP\{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{2(A+P)(A-r)(r-P) - \{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{(2A^2 - 2Ar + 2AP - 2Pr)(r-P) - \{APr - 2AP^2 + rP^2 + A^2r - 2A^2P + APr - 2Ar^2 + 4APr - 2Pr^2\}}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + [Ar - r^2 - AP + Pr + r^2 - AP]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{(2A^2 - 2Ar + 2AP - 2Pr)(r-P) - \{6APr - 2AP^2 + P^2r + A^2r - 2A^2P - 2Ar^2 - 2Pr^2\}}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + [Ar - 2AP + Pr]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{2A^2r - 2Ar^2 + 4APr - 2Pr^2 - 2A^2P - 2AP^2 + 2P^2r - 6APr + 2AP^2 - P^2r - A^2r + 2A^2P + 2Ar^2 + 2Pr^2}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + [Ar - 2AP + Pr]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{A^2r - 2APr + P^2r}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + [Ar - 2AP + Pr]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{r(A^2 - 2AP + P^2)}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + [Ar - 2AP + Pr]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{r(A-P)^2}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + A^2r^2 + 4A^2P^2 + P^2r^2 - 4A^2Pr + 2APr^2 - 4AP^2r} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{r(A-P)^2}{-2APr^2 + A^2r^2 + P^2r^2} = \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{r(A-P)^2}{r^2(-2AP + A^2 + P^2)}
\end{aligned}$$

Dit wordt uiteindelijk:

$$= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{r(A-P)^2}{r^2(A-P)^2}$$

Wat resulteert in:

$$= \frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}}$$

Dus:

$$\frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}}$$

Dit bevestigt dat de bewerking van de integrand correct is!!

3.2.4.2 Uitwerking van de Tweede Integraal in het Vorige Hoofdstuk.

We hebben de uitdrukking voor de tweede integraal afgeleid:

Algemene vorm:

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = -\frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{cx} - \frac{b}{2c} \int \frac{1}{x \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

(Zie ook het volgende hoofdstuk voor de uitwerking van de integraal aan de rechterkant.)

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = -\frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{cx} - \frac{b}{2c\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx + 2c}{|x|\sqrt{b^2 - 4ac}}, (c < 0)$$

Nu met $a = -1$, $b = A + P$ en $c = -AP$

$$\begin{aligned} \phi_A - \phi_P &= \int_P^A \frac{\varepsilon/2}{r^2 \sqrt{(A-r)(r-P)}} dr = \int_P^A \frac{\varepsilon/2}{r^2 \sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr \\ &= -\varepsilon/2 \left[\frac{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}}{-APr} \right]_P^A + \varepsilon/2 \frac{(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} \left[\arcsin \frac{(A+P)r - 2AP}{|r|\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} \right]_P^A \\ &= 0 + \varepsilon/2 \frac{(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} \left\{ \arcsin \frac{(A+P)A - 2AP}{|A|\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} - \arcsin \frac{(A+P)P - 2AP}{|P|\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} \right\} \\ &= \varepsilon/2 \frac{(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} \left\{ \arcsin \frac{(A-P)A}{|A|(A-P)} - \arcsin \frac{(P-A)P}{|P|(A-P)} \right\} \\ &= \varepsilon/2 \frac{(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} \{ \arcsin(1) - \arcsin(-1) \} \\ &= \varepsilon/2 \frac{(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} = \varepsilon/2 \frac{\pi(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} = \frac{\pi\varepsilon}{4D\sqrt{AP}} \end{aligned}$$

Dit komt overeen met de berekeningen.

3.2.4.3 Alternatieve Oplossing voor Integraal 1.

Volgens de oplossingen gegeven in [Wikipedia: https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_integralen](https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_integralen) is:

$$\int \frac{1}{x \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx + 2c}{|x|\sqrt{b^2 - 4ac}} + C, (c < 0)$$

Dus:

$$\phi_A - \phi_P = \int_P^A \frac{1}{r \sqrt{(A-r)(r-P)}} dr = \int_P^A \frac{1}{r \sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \arcsin \left[\frac{(A+P)r - 2AP}{|r|\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} \right]_P^A \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \left\{ \arcsin \frac{(A+P)A - 2AP}{|A|\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} - \arcsin \frac{(A+P)P - 2AP}{|P|\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \left\{ \arcsin \frac{(A-P)A}{|A|(A-P)} - \arcsin \frac{(P-A)P}{|P|(A-P)} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \{ \arcsin(1) - \arcsin(-1) \} \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} = \frac{\pi}{\sqrt{AP}}
\end{aligned}$$

3.2.4.4 Gedetailleerde Berekening van de Tijd T van een Omwenteling.

$$L = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \Rightarrow d\tau = \frac{r^2}{L} d\phi \Rightarrow T = \int d\tau = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{L} d\phi$$

Gebruikmakend van vergelijking 40:

$$\begin{aligned}
d\phi &= \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1-E^2/c^4}} \left[\frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{r^2\sqrt{(A-r)(r-P)}} \right] dr \\
d\tau &= \frac{r^2}{L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1-E^2/c^4}} \left[\frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{r^2\sqrt{(A-r)(r-P)}} \right] dr \\
d\tau &= \frac{1}{L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1-E^2/c^4}} \left[\frac{r}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \right] dr \\
\Delta T &= \int d\tau = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1-E^2/c^4}} \int_P^A \left[\frac{r}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \right] dr
\end{aligned} \tag{40}$$

Eerst de uitwerking van de linkerintegraal:

$$\int_P^A \frac{r}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} dr = \int_P^A \frac{r}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr \tag{41}$$

Volgens de lijst van integralen ([Wikipedia](https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_integralen)): (https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_integralen)

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \tag{42}$$

En:

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C, (a < 0)$$

Om de linkerintegraal om te zetten naar de integraalformule:

$$\begin{aligned} & \int_P^A \frac{r}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr = \\ & = \left[\frac{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}}{-1} \right]_P^A - \frac{(A+P)}{-2} \int_P^A \frac{1}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr \\ & = -\sqrt{-A^2 + (A+P)A - AP} + \sqrt{-P^2 + (A+P)P - AP} + \frac{(A+P)}{2} \int_P^A \frac{1}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr \\ & = -0 + 0 + \frac{(A+P)}{2} \int_P^A \frac{1}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr \end{aligned}$$

Nu alleen de integraal:

$$\begin{aligned} & \int_P^A \frac{1}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr = \left[\arcsin \frac{2r - (A+P)}{\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} + C \right]_P^A = \\ & \arcsin \frac{2A - (A+P)}{\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} + C - \arcsin \frac{2P - (A+P)}{\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} - C \\ & = \arcsin \frac{A-P}{A-P} - \arcsin \frac{-A+P}{A-P} \\ & \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

Dus, de linkerintegraal levert:

$$\frac{(A+P)\pi}{2}$$

De rechterintegraal levert:

$$\pi \frac{\varepsilon}{2}$$

De som is:

$$\frac{\pi}{2} ((A+P) + \varepsilon)$$

Dus, de totale integraal voor een volledige omwenteling is:

$$\Delta T = 2 \frac{1}{L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \frac{\pi}{2} ((A + P) + \varepsilon)$$

Met:

$$\varepsilon = \frac{R_s}{1 - \frac{R_s}{D}}$$

$$\Delta T = 2 \frac{1}{L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \frac{\pi}{2} \left((A + P) + \frac{R_s}{1 - \frac{R_s}{D}} \right)$$

$$\Delta T = 2\pi \frac{A + P}{2L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \left(1 + \frac{R_s}{(A + P) \left(1 - \frac{R_s}{D}\right)} \right)$$

$$\Delta T = 2\pi \frac{A + P}{2L} \sqrt{\frac{AP}{1 - R_s/D}} \left(1 + \frac{R_s}{(A + P) \left(1 - \frac{R_s}{D}\right)} \right)$$

Voor Mercurius:

$$A = 6.98 * 10^{10}, P = 4.60 * 10^{10}, D = 2.77 * 10^{10}, R_{s(sun)} = 2953.25, L = 2.71 * 10^{15},$$

De tijd voor één omwenteling is:

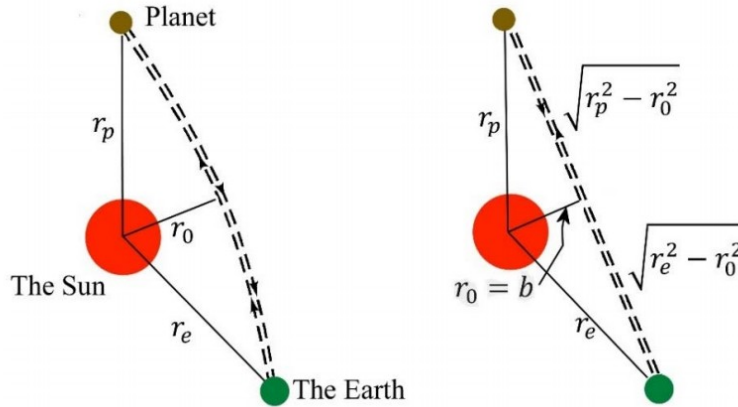
$$\Delta T = 7598744 \text{ sec} \Rightarrow \frac{7598744}{24 * 3600} = \mathbf{87.95 \text{ dagen}}$$

Afgeleid in hoofdstuk [3.6.2](#) vergelijking [2d](#) de instantane rotatiesnelheid van Mercurius als functie van $\emptyset$:

$$v = \left\{ \frac{GM_{sun}}{a(1 - e^2)} (1 + 2e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (42a)$$

3.3 Experiment 5 - Shapiro Tijdsvertraging – Hobson en anderen

In het Shapiro-experiment werden radarsignalen vanaf de aarde naar een planeet gestuurd, die op dat moment aan de andere kant van de zon stond, en weerkaatsten vervolgens weer terug naar de aarde. Volgens de Algemene Relativiteitstheorie zal het signaal, dat net langs de zon scheert, worden afgebogen door de zwaartekracht van de zon, of eigenlijk de massa van de zon heeft de ruimte-tijd vervormd zodanig dat het signaal een “rechte gekromde” lijn volgt (zie fig. 4). Dit experiment werd in 1964 uitgevoerd en sindsdien meerdere keren geverifieerd. Dit experiment wordt soms de *vierde* klassieke test van de Algemene Relativiteitstheorie genoemd.



Figuur 1: De radarreflectie van fotonen van de aarde naar een planeet en terug. Het linker beeld toont het daadwerkelijke pad, overdreven weergegeven. Het rechter beeld toont de Euclidische vorm.

(Uit *Tests of General Relativity: A Review* door Estelle Asmodelle (Asmodelle, 2017))

Om de Shapiro-vertraging te definiëren, nemen we aan dat de aarde en de planeet stilstaan, terwijl de totale tijd voor de retourreis van het radarsignaal Δt is, in coördinaattijd. De waarde van t moet worden weergegeven in termen van r over het gehele pad, waarbij r_0 de kortste afstand tot de zon is.

Voor de berekening van de Shapiro-vertraging wordt de Schwarzschild-vergelijking toegepast.

Schwarzschild:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM_{sun}}{c^2 r}} = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$$

waarbij $R_s = \frac{2GM_{sun}}{c^2}$ (de Schwarzschild – radius, hier van de zon)

We kiezen het referentiekader zodanig dat het overeenkomt met het evenaarsvlak $\theta = \pi/2$.

Dan geldt:

$$c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\phi^2$$

Voor fotonen of radar echo's geldt dat $d\tau = 0$. In dat geval geldt dan:

$$\sigma^2 c^2 dt^2 = \frac{dr^2}{\sigma^2} + r^2 d\phi^2$$

Afleiding naar de affiene parameter λ :

$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2$$

Zoals afgeleid in formule [11](#) uit hoofdstuk [3.2](#) is het impulsmoment:

$$L = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}$$

$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2}$$

Vermenigvuldigen met σ^2 :

$$\sigma^4 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \sigma^2$$

Stel:

$$k^2 = \sigma^4 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2$$

Opgemerkt: Dit is ook $k = \frac{E}{c^2}$ zoals te zien is in formule [9a](#) in hoofdstuk [3.2](#).

Dan is:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \sigma^2 = k^2 c^2$$

De energievergelijking voor een fotonenbaan in de Schwarzschild-geometrie is:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) = k^2 c^2 \quad (42b)$$

Zoals eerder is afgeleid:

$$k^2 = \sigma^4 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = \frac{k^2}{\sigma^4}$$

Waarbij we gebruiken:

$$\left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = \frac{k^2}{\sigma^4} = \frac{k^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^2}$$

Nu is:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = \frac{k^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \quad (42c)$$

We kunnen de energievergelijking (42b) herschrijven:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) = k^2 c^2$$

Vervang $\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2$ door (42c):

$$\frac{k^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) = k^2 c^2$$

Deel door $\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)$:

$$\frac{k^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^3} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{k^2 c^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} = 0$$

Vervolgens delen we door k^2 :

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^3} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{k^2 r^2} - \frac{c^2}{1 - \frac{R_s}{r}} = 0 \quad (43)$$

Beschouw nu het pad van een foton van de Aarde naar een andere planeet (bijvoorbeeld Venus, met $r_p = r_V$), zoals weergegeven in Figuur 2. Het is duidelijk dat het pad van het foton zal worden afgebogen door het zwaartekrachtsveld van de Zon (ervan uitgaande dat de planeten zich in een configuratie bevinden zoals weergegeven in de figuur, waarbij het foton dicht langs de Zon moet passeren om Venus te bereiken). Laat r_0 de coördinatenafstand zijn van het dichtste punt waar het foton de Zon nadert; dan geldt:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r_0} = 0$$

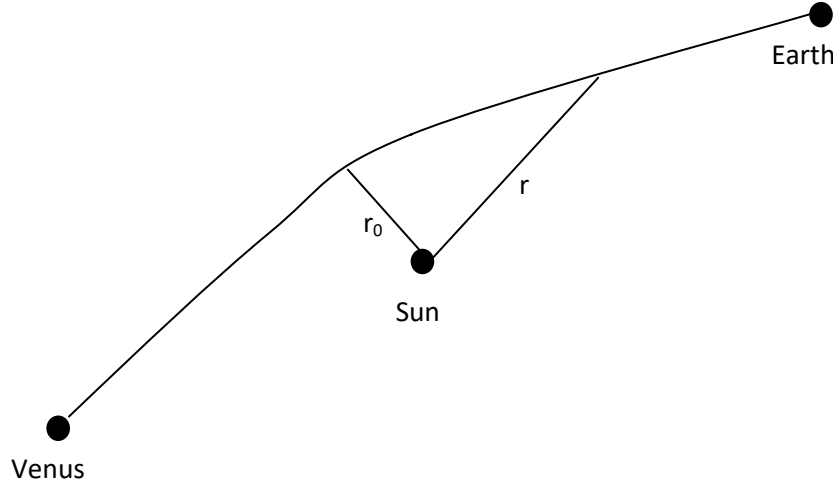
En dus, uit (43) vinden we de relatie tussen de constanten

$$\frac{L^2}{k^2 r_0^2} = \frac{c^2}{1 - \frac{R_s}{r_0}}$$

Daarom, na herschikking, kunnen we (43) schrijven als:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^3 \left(-\frac{L^2}{k^2 r^2} + \frac{c^2}{1 - \frac{R_s}{r}}\right) = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^3 \left(\frac{c^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - \frac{L^2 r_0^2}{k^2 r_0^2 r^2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^3 \left(\frac{c^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - \frac{r_0^2 c^2}{r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)}\right) \\ &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^2 \left(c^2 - \frac{r_0^2 c^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)}\right) = c^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{r_0^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = c \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[1 - \frac{r_0^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$



Figuur 2 Fotonpad van de Aarde naar Venus, afgebogen door de Zon.

Dit kan worden geïntegreerd om de tijd te bepalen die nodig is om te reizen tussen punt r_0 en r :

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{1}{c \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[1 - \frac{r_0^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

Omdat $R_s \ll r_0$, kunnen we de eerste orde Taylor-uitbreiding nemen van:

$$\frac{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{\left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)} \approx \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left(1 + \frac{R_s}{r_0}\right) = 1 - \frac{R_s}{r} + \frac{R_s}{r_0} - \frac{R_s^2}{rr_0}$$

Dus kan de integrand worden uitgebreid tot de eerste orde in R_s/r :

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{1}{c \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[1 - \frac{r_0^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r} + \frac{R_s}{r_0} - \frac{R_s^2}{rr_0}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

Vermenigvuldig de teller en de noemer met r :

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[r^2 - r_0^2 \left(1 - \frac{R_s}{r} + \frac{R_s}{r_0} - \frac{R_s^2}{rr_0}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[r^2 - r_0^2 - R_s r_0 + \frac{R_s r_0^2}{r} + \frac{R_s^2 r_0}{r}\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c \sqrt{r^2 - r_0^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[1 - \frac{R_s r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 - r_0^2}\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c \sqrt{r^2 - r_0^2} \left[\left(1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_s r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 - r_0^2}\right) \right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

Eerst werken we de rechterkant van de teller uit:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_s r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 - r_0^2}\right) = \\ & = 1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2} - \frac{R_s r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 - r_0^2} + \frac{2R_s^2 r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r(r^2 - r_0^2)} - \frac{R_s^3 r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2(r^2 - r_0^2)} \end{aligned}$$

Na het negeren van de kleinste termen:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_s r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 - r_0^2}\right) = 1 - \frac{2R_s}{r} - \frac{R_s r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)}{r^2 - r_0^2} \\ & \left(1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_s r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 - r_0^2}\right) = 1 - \frac{2R_s}{r} - \frac{R_s r_0 (r - r_0)}{r(r + r_0)(r - r_0)} \\ & \left(1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_s r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 - r_0^2}\right) = 1 - \frac{2R_s}{r} - \frac{R_s r_0}{r(r + r_0)} \end{aligned}$$

Vul de noemer in:

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c \sqrt{r^2 - r_0^2} \left[1 - \frac{2R_s}{r} - \frac{R_s r_0}{r(r + r_0)}\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

Bij benadering met een Taylor-uitbreiding van de eerste orde:

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c \sqrt{r^2 - r_0^2}} \left[1 + \frac{R_s}{r} + \frac{R_s r_0}{2r(r + r_0)}\right] dr$$

Dit kan geëvalueerd worden (zie controle hieronder) om te geven:

$$t(r, r_0) = \frac{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} + \frac{R_s}{c} \ln \left[\frac{r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{r_0} \right] + \frac{R_s}{2c} \left(\frac{r - r_0}{r + r_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

We kunnen de bovenstaande formule controleren door de afgeleide te nemen; die moet gelijk zijn aan de integrand:

$$\begin{aligned} \frac{dt(r, r_0)}{dr} &= \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{c} \frac{\left(\frac{1}{r_0} + \frac{r}{r_0(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} \right)}{\frac{r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{r_0}} + \frac{R_s}{4c} \frac{\left(\frac{1}{r + r_0} - \frac{(r - r_0)}{(r + r_0)^2} \right)}{\left(\frac{r - r_0}{r + r_0} \right)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{dt(r, r_0)}{dr} &= \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{c} \frac{\left(1 + \frac{r}{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} \right)}{r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{4c} \frac{\left(\frac{r + r_0 - r + r_0}{(r + r_0)^2} \right)}{\left(\frac{r - r_0}{r + r_0} \right)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{dt(r, r_0)}{dr} &= \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{c} \frac{\left(r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}} \right)}{\left(r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}} \right) (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{4c} \frac{(r + r_0 - r + r_0)}{\left(\frac{r - r_0}{r + r_0} \right)^{\frac{1}{2}} (r + r_0)^2} \\ \frac{dt(r, r_0)}{dr} &= \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{c} \frac{1}{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{2c} \frac{r_0}{\frac{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{r + r_0} (r + r_0)^2} \\ \frac{dt(r, r_0)}{dr} &= \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{c} \frac{1}{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{2c} \frac{r_0}{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}} (r + r_0)} \\ \frac{dt(r, r_0)}{dr} &= \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{R_s}{r} + \frac{R_s r_0}{2r(r + r_0)} \right] \end{aligned}$$

Dus de formule is correct!

Dus:

$$t(r, r_0) = \frac{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} + \frac{R_s}{c} \ln \left[\frac{r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{r_0} \right] + \frac{R_s}{2c} \left(\frac{r - r_0}{r + r_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

De eerste term aan de rechterkant is precies wat we zouden verwachten als het licht in een rechte lijn zou reizen. De tweede en derde termen geven de extra coördinatietijd die nodig is voor het foton om langs het *gekromde pad* naar het punt r te reizen. Zoals te zien in Figuur 2, als we een radarstraal naar Venus sturen en terug, dan is de extra coördinatietijd ten opzichte van een rechte lijn:

$$\Delta t = 2 \left[t(r_E, r_0) + t(r_V, r_0) - \frac{(r_E^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} - \frac{(r_V^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} \right]$$

Zoals eerder vermeld, vormen de eerste twee termen binnen deze haakjes de relativistische tijd van de Aarde naar Venus, en de twee termen aan de rechterkant vormen de tijd als het pad gewoon een rechte lijn zou zijn. De factor 2 is inbegrepen omdat het foton naar Venus moet gaan en terug naar de Aarde.

Aangezien $r_E \gg r_0$ en $r_V \gg r_0$ hebben we:

$$t(r_E, r_0) - \frac{(r_E^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} \approx \frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{r_E + r_E}{r_0} \right) + \frac{R_s}{2c} = \frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{2r_E}{r_0} \right) + \frac{R_s}{2c}$$

$$t(r_V, r_0) - \frac{(r_V^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} \approx \frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{r_V + r_V}{r_0} \right) + \frac{R_s}{2c} = \frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{2r_V}{r_0} \right) + \frac{R_s}{2c}$$

Sommatie:

$$\frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{2r_E}{r_0} \right) + \frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{2r_V}{r_0} \right) + \frac{R_s}{c} = \frac{2GM}{c^3} \left[\ln \left(\frac{4r_E r_V}{r_0^2} \right) + 1 \right]$$

Dus om naar Venus en terug te gaan, is de extra coördinaattijdvertraging:

$$\Delta t \approx \frac{4GM_{sun}}{c^3} \left[\ln \left(\frac{4r_E r_V}{r_0^2} \right) + 1 \right]$$

Voor Venus, wanneer het tegenover de Aarde staat aan de andere kant van de Zon:

$$\Delta t \approx 252 \mu s.$$

Terwijl voor Mercurius geldt:

$$\Delta t \approx 240 \mu s.$$

De totale tijd (Aarde, Zon, Venus en terug) zonder vertraging is 1720 seconden.

Natuurlijk meten klokken op Aarde geen coördinaattijd, vanwege de **rotatie van de Aarde om haar eigen as** en het effect van de **rotatie van de Aarde rond de Zon**.

Door de **rotatie van de Aarde om haar eigen as** wordt de overeenkomstige eigen tijd van het signaal gegeven door:

$$\Delta\tau = \left(1 - \frac{2GM_E}{c^2 r_E}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta t$$

Het effect is dus:

$$\Delta t - \Delta\tau = \Delta t - \left(1 - \frac{2GM_E}{c^2 r_E}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta t$$

Dit geeft:

$$\Rightarrow 6.98 * 10^{-10} \Delta t \text{ voor } 252\mu s \Rightarrow 1.76 * 10^{-13} \text{ seconden} = 0.176ps$$

$$p = 10^{-12}$$

Aangezien $r_E \gg \frac{GM}{c^2}$, en dus $0.176ps \ll 252\mu s$ kunnen we dit effect negeren voor de nauwkeurigheid van onze berekening.

Het effect van de **rotatie van de Aarde rond de Zon** veroorzaakt een vertraging van 15 nanoseconden per seconde, zoals vermeld in hoofdstuk (3.4).

Voor de extra tijdvertraging $\Delta t \approx 252\mu s$ vanaf Venus, veroorzaakt de rotatie van de Aarde rond de Zon een klein effect van: $252 * 10^{-6} * 15 * 10^{-9} = 3.78 * 10^{-12} \text{ seconden} = 3.78 ps$, wat ook genegeerd kan worden.

3.4 Tijdsrelatie tussen Waarnemer op Aarde en het Centrum van de Zon

Wanneer in andere hoofdstukken de afbuiging van licht of de banen van planeten rond de Zon worden besproken, wordt een referentiekader gebruikt met het centrum in het midden van de Zon, terwijl wij het fenomeen vanaf de Aarde observeren en een **rotatiesnelheid hebben ten opzichte van de Zon**. Hieronder beschouwen we dit effect en berekenen we de correctiefactor.

Het vertrekpunt is de Schwarzschild-metrik:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2$$

Met:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM_{sun}}{c^2 r}} \quad R_s = \frac{2GM_{sun}}{c^2}$$

Het centrum van het referentiekader is het middelpunt van de Zon. De baan van de Aarde rond de Zon wordt verondersteld een cirkel te zijn. De waargenomen fysieke beweging bevindt zich in het evenaarsvlak van het referentiekader. De straal is dus constant en de hoek θ is $\pi/2$.

De vergelijking vereenvoudigt zich dan to:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - r^2 d\phi^2$$

τ is de eigen tijd van de waarnemer op Aarde (bijvoorbeeld op de Noord- of Zuidpool), terwijl t de coördinaattijd is van het universele Zon-referentiekader. Alles, inclusief de waarnemer op Aarde, is gerelateerd aan het universele Zon-referentiekader.

$$d\tau^2 = \sigma^2 dt^2 - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 dt^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r} - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right) dt^2$$

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r} - \frac{v^2}{c^2} \right) dt^2$$

$$d\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{R_s}{r} - \frac{v^2}{c^2} \right)} dt$$

Taylorontwikkeling van de eerste orde:

$$d\tau = \left(1 - \frac{R_s}{2r} - \frac{v^2}{2c^2} \right) dt$$

Waarbij $R_s = 2950 \text{ m}$ de Schwarzschildstraal van de Zon is. De rotatiesnelheid van de Aarde rond de Zon is $v = 30,000 \text{ m/s}$. De afstand van de waarnemer tot de Zon is $r \approx 150 * 10^9 \text{ m}$.

De tweede term aan de rechterkant is het gevolg van de zwaartekracht van de Zon en de derde term is het gevolg van de snelheid van de Aarde rond de Zon.

$$d\tau = (1 - 99.10^{-10} - 50.10^{-10}) dt$$

$$d\tau \approx (1 - 15.10^{-9}) dt$$

$$\Delta t - \Delta\tau = 15.10^{-9} \Delta t$$

Dit is de relatie tussen de tijd van de waarnemer op Aarde en de universele Zon-referentiekadertijd t .

Aangezien de waarnemer op Aarde ook wordt beïnvloed door de **zwaartekracht van de Aarde**, en zich op een van de polen bevindt, geldt $dr = d\theta = d\phi = 0$ then

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM_E}{c^2 r}} dt = \sqrt{1 - 1.3908 * 10^{-9}} dt = (1 - 0.6954 * 10^{-9}) dt$$

Aan de evenaar is de straal $r_e = 6,378,137 \text{ m}$. Bovendien moet de rotatie van de Aarde in rekening worden gebracht. Dit geeft de waarnemer een hoeksnelheid van $\frac{d\phi}{dt}$ van 2π gedeeld door de siderische periode van de rotatie van de Aarde, namelijk 86162.4 seconden. Dus $d\phi = 7.2923 * 10^{-5} dt$. De vergelijking voor de eigen tijd wordt dan:

$$d\tau = \sqrt{(1 - 1.3908 * 10^{-9}) - 2.4059 * 10^{-12}} dt = (1 - 0.6966 * 10^{-9}) dt.$$

Met $M_E = 5.9742 * 10^{24} \text{ kg}$, $r_e = 6,356,752 \text{ m}$, $G = 6.674 * 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$, $c = 299,792,458 \text{ m/s}$.

3.5 Banen van Massieve Deeltjes - Tweede Afleiding

We doen deze tweede afleiding omdat de oplossing ons dichterbij de oorspronkelijke formule van een ellips brengt:

$$r(\emptyset) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos[\emptyset - \theta]}$$

Deze vergelijking wordt vergeleken met de relativistische uitkomst aan het einde van dit hoofdstuk:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos[\emptyset - \epsilon \emptyset]}$$

Hier zien we dat θ een functie is van $\emptyset$ en lichtjes verandert met een factor ϵ .

Uit "General Relativity an introduction for Physicists" door M.P. Hobson, G. Efstathiou en A.N. Lasenby Pag. 230 (M.P Hobson, 2006).

Zoals eerder afgeleid, zijn de volgende vergelijkingen beschikbaar:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\lambda} &= \frac{E}{c^2} \\ c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\emptyset}{d\lambda}\right)^2 &= c^2 \\ r^2 \frac{d\emptyset}{d\lambda} &= L \end{aligned}$$

Door de eerste en derde vergelijking in de tweede te substitueren krijgen we:

$$\begin{aligned} c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\emptyset}{d\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) &= c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \\ \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\emptyset}{d\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 &= c^2 \left(\frac{2GM}{c^2 r} - 1\right) \\ \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{E^2}{c^2} &= c^2 \left(\frac{2GM}{c^2 r} - 1\right) = \frac{2GM}{r} - c^2 \\ \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{2GM}{r} &= c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) \\ \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} &= c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) + \frac{2GM}{r} + \frac{2GML^2}{c^2 r^3} \end{aligned}$$

Nu:

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{d\emptyset} \frac{d\emptyset}{d\lambda} = \frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\emptyset}$$

Dit ingevuld in de vorige vergelijking:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} &= c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) + \frac{2GM}{r} + \frac{2GML^2}{c^2 r^3} \\ \left(\frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} &= c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) + \frac{2GM}{r} + \frac{2GML^2}{c^2 r^3} \\ \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} &= \frac{c^2}{L^2} \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) + \frac{2GM}{rL^2} + \frac{2GM}{c^2 r^3}\end{aligned}$$

Vervang nu door $u = 1/r$

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\phi} = \frac{-1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = - \frac{du}{d\phi}$$

Nu wordt de vergelijking:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2}{L^2} \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) + \frac{2GMu}{L^2} + \frac{2GMu^3}{c^2}$$

We differentiëren deze vergelijking ten opzichte van ϕ om vervolgens te verkrijgen:

$$2 \frac{du}{d\phi} \frac{d^2u}{d\phi^2} + 2u \frac{du}{d\phi} = \frac{2GM}{L^2} \frac{du}{d\phi} + \frac{6GMu^2}{c^2} \frac{du}{d\phi}$$

We delen door $2 \frac{du}{d\phi}$:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{L^2} + \frac{3GMu^2}{c^2} \quad (44)$$

Als we de laatste term voorlopig negeren, krijgen we de vergelijking volgens de Newtoniaanse theorie, waarvan de oplossing is:

$$u = \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \phi) \quad \text{of} \quad r = \frac{L^2}{GM(1 + e \cos \phi)} \quad (45)$$

Dit beschrijft een ellips, waarbij de parameter e de *excentriciteit* van de baan voorstelt. Zo kunnen we bijvoorbeeld de baan van een planeet om de zon tekenen. We kunnen de afstand tot het dichtstbijzijnde punt (*perihelium*) schrijven als $r_1 = a(1 - e)$ en de afstand tot het verst verwijderde punt (*aphelium*) als $r_2 = a(1 + e)$.

Afgeleid van (45) en wederom gesubstitueerd met $r=1/u$ geeft:

$$r = \frac{L^2}{GM(1 + e \cos \phi)} \Rightarrow r_{\max} = \frac{L^2}{GM(1 - e)} \quad \text{en} \quad r_{\min} = \frac{L^2}{GM(1 + e)}$$

De halve lange as a wordt dan gegeven door:

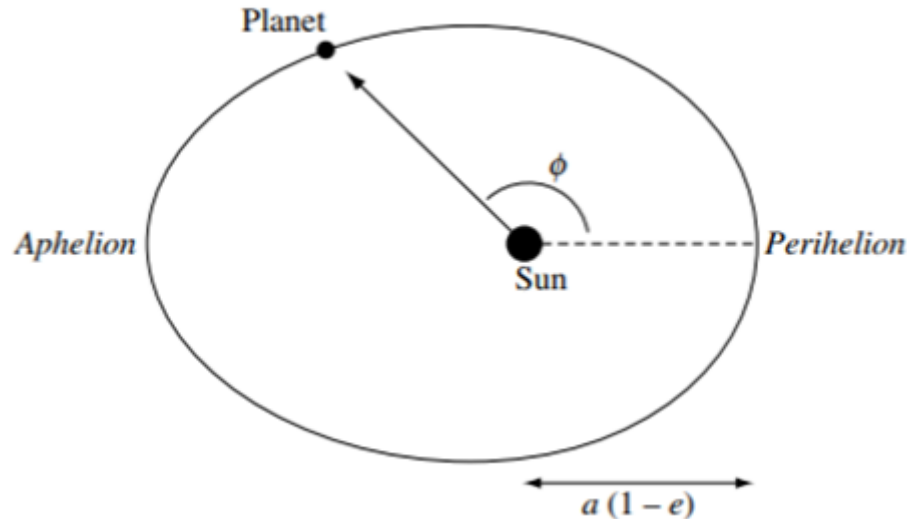
$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = \frac{L^2}{2GM} \left(\frac{1}{(1 - e)} + \frac{1}{(1 + e)} \right) = \frac{L^2}{2GM} \left(\frac{1 + e + 1 - e}{(1 - e)(1 + e)} \right)$$

Dus de bewegingsvergelijking vereist dan dat de halve lange as wordt gegeven door:

$$a = \frac{L^2}{GM(1 - e^2)} \quad (46)$$

Dus:

$$r_{max} = \frac{L^2}{GM(1 - e)} = a(1 + e) \quad \text{en} \quad r_{min} = \frac{L^2}{GM(1 + e)} = a(1 - e)$$



De ellipsvormige baan van een planeet om de zon; e is de excentriciteit van de baan.

Nu, om de derde term (uit vergelijking 44) op te nemen, wordt de oplossing als volgt:

$$u = \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \phi) + \Delta u \quad (47)$$

$$\frac{du}{d\phi} = -\frac{GM}{L^2} e \sin \phi + \frac{d\Delta u}{d\phi}$$

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} = -\frac{GM}{L^2} e \cos \phi + \frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2}$$

Dit substitueren we in formule (44):

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{L^2} + \frac{3GMu^2}{c^2} \quad (44)$$

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \phi - e \cos \phi) + \frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = \frac{GM}{L^2} + \frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u$$

$$\frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = -\frac{GM}{L^2} + \frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = -\frac{GM}{L^2} + \frac{GM}{L^2} + \frac{3GMu^2}{c^2} = \frac{3GMu^2}{c^2}$$

$$\frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = \frac{3GM}{c^2} \left(\left(\frac{GM}{L^2} \right)^2 + \left(\frac{GM}{L^2} e \cos \phi \right)^2 + (\Delta u)^2 + 2 \left(\frac{GM}{L^2} \right)^2 e \cos \phi + 2 \frac{GM}{L^2} \Delta u + 2 \frac{GM}{L^2} e \cos \phi \cdot \Delta u \right)$$

We vinden dat, tot de eerste orde in Δu ,

$$\frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} (1 + (e \cos \phi)^2 + 2e \cos \phi)$$

Een bijzondere oplossing van de vergelijking is:

$$\Delta u = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[1 + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi \right) + e \phi \sin \phi \right] \quad (48)$$

Dit kan worden gecontroleerd door directe differentiatie van (48):

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta u}{d\phi} &= \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[\frac{1}{3} e^2 \sin 2\phi + e \sin \phi + e \phi \cos \phi \right] \\ \frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} &= \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[\frac{2}{3} e^2 \cos 2\phi + e \cos \phi + e \cos \phi - e \phi \sin \phi \right] \\ \frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} &= \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[\frac{2}{3} e^2 \cos 2\phi + 2e \cos \phi - e \phi \sin \phi \right] \end{aligned}$$

Invullen in (48):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u &= \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[\frac{2}{3} e^2 \cos 2\phi + 2e \cos \phi - e \phi \sin \phi + 1 + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi \right) + e \phi \sin \phi \right] \\ \frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u &= \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} e^2 \cos 2\phi + 2e \cos \phi \right] \\ \frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u &= \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[1 + \frac{1}{2} e^2 (1 + \cos 2\phi) + 2e \cos \phi \right] \\ \frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u &= \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[1 + \frac{1}{2} e^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi + \cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + 2e \cos \phi \right] \\ \frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u &= \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} [1 + e^2 \cos^2 \phi + 2e \cos \phi] \end{aligned}$$

Dus, vergelijking (44) is correct.

Nu vullen we Δu in vergelijking (3) in:

$$\begin{aligned} u &= \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \phi) + \Delta u = \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \phi) + \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[1 + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi \right) + e \phi \sin \phi \right] \\ u &= \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \phi) + \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} e \phi \sin \phi + \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[1 + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi \right) \right] \end{aligned}$$

Aangezien de constante $\frac{3(GM)^3}{c^2 L^4}$ zeer klein is, zijn de laatste drie termen aan de rechterkant verwaarloosbaar en hebben ze geen nut voor het testen van de theorie.

Echter, de laatste term $e \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \phi \sin \phi$ kan aanvankelijk klein zijn, maar zal geleidelijk toenemen naarmate de tijd verstrijkt, aangezien de factor ϕ cumulatief is. We moeten deze dus behouden.

$$u = \frac{GM}{L^2} \left[1 + e \left(\cos \phi + \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \phi \sin \phi \right) \right] + \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[1 + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi \right) \right]$$

Dus, onze benaderde oplossing is:

$$u = \frac{GM}{L^2} \left[1 + e \left(\cos \phi + \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \phi \sin \phi \right) \right]$$

Met behulp van de relatie:

$$\begin{aligned} \cos \left[\phi \left(1 - \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \right) \right] &= \cos \left(\phi - \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \phi \right) = \cos \phi \cos \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \phi + \sin \phi \sin \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \phi \\ &\approx \cos \phi + \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \phi \sin \phi \quad \text{voor } \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \ll 1, \end{aligned}$$

kunnen we nu schrijven:

$$u \approx \frac{GM}{L^2} \left\{ 1 + e \cos \left[\phi \left(1 - \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \right) \right] \right\} = \frac{GM}{L^2} \{ 1 + e \cos[\phi(1 - \epsilon)] \}$$

Voor $r=1/u$ krijgen we:

$$r = \frac{L^2}{GM \{ 1 + e \cos[\phi(1 - \epsilon)] \}} \quad (5)$$

Hierbij is:

$$\epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2}$$

Uit deze uitdrukking zien we dat de baan periodiek is, maar met een periode van $2\pi/(1 - \epsilon)$, wat betekent dat de r -waarden zich herhalen in een cyclus die groter is dan 2π . Dit resulteert in het feit dat de baan niet "sluit", en dus *precesseert* de ellips (zie onderstaande figuur). Na één omwenteling zal de ellips draaien rond het focuspunt met een hoeveelheid:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{1 - \epsilon} - 2\pi = \frac{2\pi\epsilon}{1 - \epsilon} \approx 2\pi\epsilon = \frac{6\pi(GM)^2}{c^2 L^2}$$

Vervang L uit vergelijking (2):

$$a = \frac{L^2}{GM(1 - e^2)} \quad (2)$$

Substitueer dit in vergelijking (5):

$$r = \frac{L^2}{GM\{1 + e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]\}}$$

Het baantraject wordt dan:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]}$$

Met:

$$\epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \text{ or } \epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 GMa(1 - e^2)} = \frac{3GM}{c^2 a(1 - e^2)}$$

Afgeleid uit de derde wet van Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M + m)} \approx \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \Rightarrow T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{GM}}$$

Voor de snelheid v :

$$v = \frac{L}{r \cos \alpha} = \frac{(aGM(1 - e^2))^{1/2} (1 + e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)])}{a(1 - e^2) \cos \alpha}$$

$$v = \left(\frac{GM}{a(1 - e^2)} \right)^{1/2} \frac{(1 + e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)])}{\cos \alpha}$$

$$\epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} = \frac{3(GM)^2}{c^2 aGM(1 - e^2)} = \frac{3GM}{c^2 a(1 - e^2)}$$

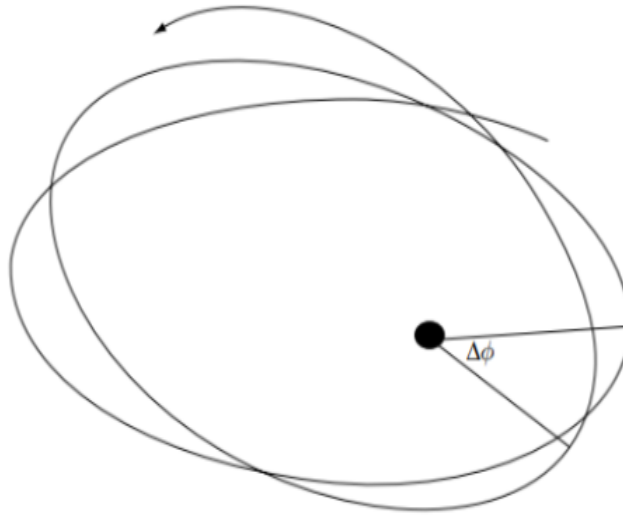
$$v = \left(\frac{GM}{a(1 - e^2)} \right)^{1/2} \frac{(1 + e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)])}{\cos \alpha}$$

$$L^2 = aGM(1 - e^2)$$

$$\Delta\emptyset = \frac{6\pi(GM)^2}{c^2 aGM(1 - e^2)}$$

Uiteindelijk krijgen we voor de precessie van de baan:

$$\Delta\emptyset = \frac{6\pi GM}{a(1 - e^2)c^2} \quad (6)$$



Precessie van een elliptische baan (sterk overdreven)

We passen vergelijking (3) toe op de baan van Mercurius, met de volgende parameters: periode = 88 dagen, $a=5.8 \times 10^{10} \text{ m}$, $e=0.2$. Met $M_s=2 \times 10^{30} \text{ kg}$, vinden we:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} = 87.95 \text{ dagen}$$

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{a(1-e^2)c^2} = 5.02 \cdot 10^{-7} \text{ per omwenteling}$$

Dus per eeuw:

$$\Delta\phi = 5.02 \cdot 10^{-7} \cdot \left(100 \cdot \frac{365.25}{88}\right) \cdot \left(\frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi}\right)$$

$$\Delta\phi = 43'' \text{ per eeuw.}$$

In werkelijkheid is de gemeten precessie:

$$5599''.7 \pm 0''.4 \text{ per eeuw}$$

Maar bijna al deze precessie wordt veroorzaakt door verstoringen van andere planeten. De resterende afwijking, na correctie voor deze verstoringen, komt opmerkelijk goed overeen met de Algemene Relativiteitstheorie. De resterende waarden voor een aantal planeten (en Icarus, een grote asteroïde met een perihelium binnen de baan van Mercurius) kunnen ook worden berekend (in boogseconden per eeuw):

	Waargenomen restverschil	Voorspeld restverschil
Mercurius	43.1+/-0.5	43.03
Venus	8+/-5	8.6
Aarde	5+/-1	3.8
Icarus	10+/-1	10.3

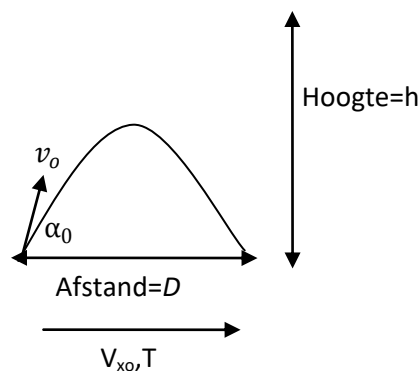
In ieder geval komen de resultaten uitstekend overeen met de voorspellingen van de Algemene Relativiteitstheorie. Einstein nam deze berekening met betrekking tot Mercurius op in zijn document over de Algemene Relativiteitstheorie uit 1915. Hij loste daarmee een van de grote problemen van de hemelmechanica op bij de allereerste toepassing van zijn ingewikkelde theorie op een empirisch toetsbaar probleem. Zoals je kunt voorstellen, gaf dit hem enorm veel vertrouwen in zijn nieuwe theorie.

3.6 Experiment 6 - Berekening van de Baan van een Kogel

Als oefening zijn we geïnteresseerd in het berekenen van de baan van een kogel met behulp van de regels van de Algemene Relativiteitstheorie, in tegenstelling tot de Newtoniaanse benadering.

Voor de benadering volgens de Algemene Relativiteit veronderstellen we dat de baan van de kogel door de massa van de Aarde gedwongen wordt om een elliptische vorm te volgen. Voor de berekening maken we gebruik van de Schwarzschild-vergelijking. Maar eerst beginnen we met de Newtoniaanse benadering.

3.6.1 Via Newton-Benadering



De tijd die de kogel nodig heeft om de afstand D af te leggen met de initiële horizontale snelheid v_{x0} is:

$$v_{x0} = \frac{D}{T} \Rightarrow T = \frac{D}{v_{x0}}$$

Om de afstand D af te leggen, heeft de kogel ook een opwaartse snelheid nodig, anders raakt hij te vroeg de grond. Dit vereist een initiële snelheidscomponent in de y -richting v_{y0} . Deze snelheid wordt bepaald door de

horizontale afstand D en de tijd T . Dus, T is ook de tijd die het kost om vanaf de grond omhoog te gaan en weer terug naar de grond te vallen; de tijd omhoog is gelijk aan de tijd omlaag.

Dus de tijd om het hoogste punt te bereiken is $T/2$ seconden:

$$v_y = v_{y0} - gt$$

Wanneer bij $T/2$ het hoogste punt is bereikt, is:

$$v_y = 0$$

Dus:

$$\Rightarrow v_{y0} = gt = g \frac{T}{2} = g \frac{D}{2v_{x0}}$$

Wanneer de kogel van het hoogste punt h terugvalt, duurt het $T/2$ om de grond te bereiken:

$$h - \frac{g}{2} \left(\frac{T}{2} \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\frac{D}{2v_{x0}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow v_{x0} = D \sqrt{\frac{g}{8h}}$$

Om het hoogste punt te bereiken:

$$v_{y0} = g \frac{T}{2} = g \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hg}$$

$$v_o^2 = v_{x0}^2 + v_{y0}^2 = \frac{gD^2}{8h} + 2hg = g \left(\frac{D^2 + 16h^2}{8h} \right)$$

De totale snelheid wordt gegeven door:

$$v_o = \sqrt{g \left(\frac{D^2 + 16h^2}{8h} \right)}$$

$$v_{x0} = v_o \cos \alpha_0$$

$$\tan \alpha_0 = \frac{4h}{D}$$

Kogelbaan:

$$y(t) = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = g \frac{T}{2}t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt(T - t) =$$

$$y(t) = \frac{1}{2}gt\left(\frac{D}{v_{xo}} - t\right)$$

Of:

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{g}{v_{xo}^2} x(D - x)$$

Dus, de baan $y(x)$ is een functie van de vereiste afstand D wanneer de initiële horizontale snelheidscomponent v_{xo} is.

Voorbeeld:

Neem aan dat $g=$	9.87	9.87	9.87	9.87
Horizontale afstand (m):	10	10	100	100
Horizontale snelheid (m/sec):	5	500	5	50
Tijd T (sec):	2	0.02	20	2
Hoogte (m):	4.93	4.93E-04	493	4.93
Totale snelheid (m/sec):	11.06	500	99	51

3.6.2 Via Schwarzschild-Benadering

Voor deze benadering beschouwen we de kogelbaan als een deel van een ellips met het middelpunt van de aarde als een van de brandpunten. We gebruiken de resultaten uit de Schwarzschild-vergelijking in hoofdstuk [Trajectories of massive particles-Second Derivation](#) en [Het baantraject wordt](#) dan:

De semi-grote as is:

$$a = \frac{L^2}{GM(1 - e^2)} \quad (2)$$

De parameter e staat voor de excentriciteit van de kogel baan. Het perihelium is $r_1 = a(1 - e)$ en het aphelium is $r_2 = a(1 + e)$.

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$$

Dus voor een cirkel is $e=0$ en $r = r_1 = r_2=a$.

Om een ellips te verkrijgen, zoals in de onderstaande tekening, waarbij het middelpunt van de aarde samenvalt met de linker focus van de ellips, ziet de vergelijking er als volgt uit:

$$r(\varnothing) = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos[\varnothing(1 - e)]} \quad (2a)$$

Nu gaan we de hoek α afleiden tussen v , de snelheid tangentaal aan de ellips, en v_{per} , loodrecht op r , om het impulsmoment te bepalen. In dit experiment is v de totale snelheid van de kogel langs de ellips, terwijl v_{per} de component van de snelheid v is ten opzichte van het aardoppervlak en zoals vermeld loodrecht op $r(\varnothing)$.

$$\tan \alpha = \frac{dr}{rd\emptyset} = \frac{\{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]\} \{a(1 - e^2)(1 - \epsilon)(e\sin[\emptyset(1 - \epsilon)])\}}{a(1 - e^2) \{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]\}^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{dr}{rd\emptyset} = \frac{e(1 - \epsilon)\sin[\emptyset(1 - \epsilon)]}{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]}$$

$$\alpha = \arctan \left\{ \frac{e(1 - \epsilon)\sin[\emptyset(1 - \epsilon)]}{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]} \right\}$$

Als:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

Dan krijgen we:

$$\cos \alpha = \left[1 + \left(\frac{e(1 - \epsilon)\sin[\emptyset(1 - \epsilon)]}{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cos \alpha = \left[\frac{1 - 2e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2\cos^2[\emptyset(1 - \epsilon)] + \{e(1 - \epsilon)\sin[\emptyset(1 - \epsilon)]\}^2}{\{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]\}^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Vanwege het negatieve wortelteken draaien we de vergelijking om:

$$\cos \alpha = \frac{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]}{[1 - 2e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2\cos^2[\emptyset(1 - \epsilon)] + (1 - 2\epsilon + \epsilon^2)e^2\sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)]]^{1/2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]}{[1 - 2e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2\cos^2[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2\sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)] - \epsilon(2 - \epsilon)e^2\sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)]]^{1/2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]}{[1 - 2e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2(1 - \epsilon(2 - \epsilon)\sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)])]^{1/2}} \quad (2b)$$

Het momentum L is constant over de hele ellips. Het momentum is de snelheid loodrecht op r , vermenigvuldigd met r (ervan uitgaande dat de massa eenheid is):

$$L = v_{per} \cdot r = v \cdot \cos \alpha \cdot r$$

Dus hier geldt:

$$L = v_{x0} \cdot R_{earth}$$

Volgens vergelijking (2):

$$L = \sqrt{aGM(1 - e^2)}$$

De snelheid v wordt gegeven door:

$$v = \frac{L}{r \cos \alpha} = \frac{(aGM(1 - e^2))^{1/2}}{a(1 - e^2) \cos \alpha} (1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)])$$

Dit vereenvoudigt tot:

$$v = \left(\frac{GM}{a(1-e^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(1 - e \cos[\phi(1-\epsilon)])}{\cos \alpha} \quad (2c)$$

Vul $\cos(\alpha)$ uit vergelijking (2b) in vergelijking (2c) in:

$$v = \left(\frac{GM}{a(1-e^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(1 - e \cos[\phi(1-\epsilon)])}{1 - e \cos[\phi(1-\epsilon)]} [1 - 2e \cos[\phi(1-\epsilon)] + e^2(1 - \epsilon(2-\epsilon) \sin^2[\phi(1-\epsilon)])]^{1/2}$$

De ogenblikkelijke snelheid als functie van ϕ is:

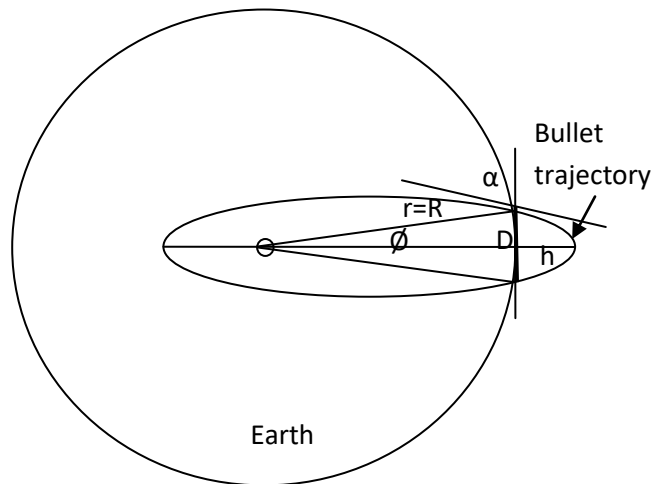
$$v = \left(\frac{GM}{a(1-e^2)} (1 - 2e \cos[\phi(1-\epsilon)] + e^2\{1 - \epsilon(2-\epsilon) \sin^2[\phi(1-\epsilon)]\}) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2d)$$

Verkregen uit het vorige hoofdstuk [ε](#):

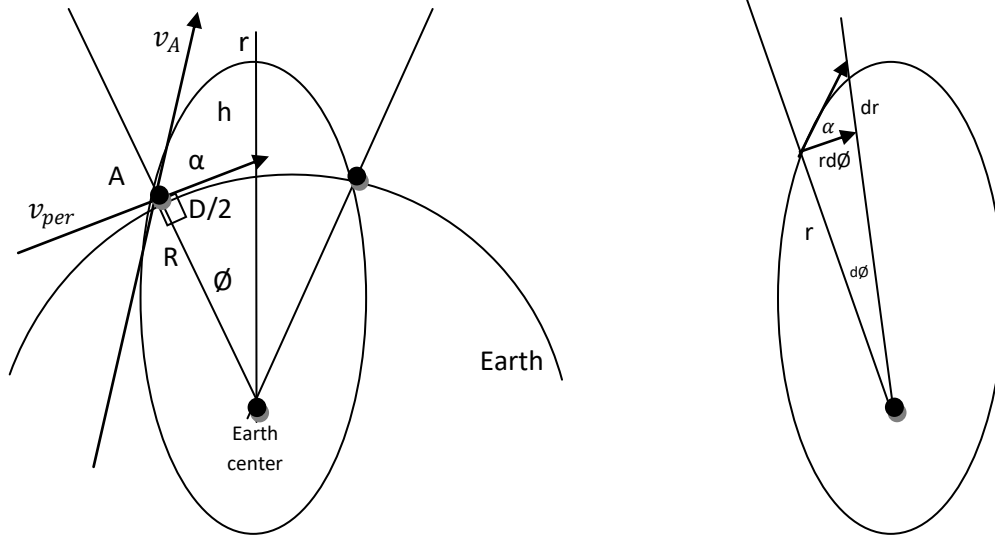
$$\epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} = \frac{3(GM)^2}{c^2 a GM (1-e^2)} = \frac{3GM}{c^2 a (1-e^2)}$$

Hier is:

$$\epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} = \frac{3(GM)^2}{c^2 (v_{x0} R_{earth})^2} = \frac{3c^2}{v_{x0}^2} \left(\frac{GM}{c^2 R_{earth}} \right)^2 \text{ deze is dimensieloos} \quad (2e)$$



Om iets verder in te zoomen:



$$\phi R = \frac{D}{2} \Rightarrow \phi = \frac{D}{2R}$$

$$v_{per} = v_{xA} = v \cos(\alpha) \text{ en } v_{yA} = v \sin(\alpha)$$

Uit (2a)

$$a(1 - e^2) = r\{1 - e \cos[\phi(1 - \epsilon)]\}$$

Uit (2d)

$$v = \left(\frac{GM}{a(1 - e^2)} (1 - 2e \cos[\phi(1 - \epsilon)] + e^2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)]\}) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v^2 = \frac{GM}{a(1 - e^2)} (1 - 2e \cos[\phi(1 - \epsilon)] + e^2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)]\})$$

$$v^2 = GM \frac{(1 - 2e \cos[\phi(1 - \epsilon)] + e^2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)]\})}{r\{1 - e \cos[\phi(1 - \epsilon)]\}}$$

$$\frac{v^2 r}{GM} \{1 - e \cos[\phi(1 - \epsilon)]\} = 1 - 2e \cos[\phi(1 - \epsilon)] + e^2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)]\}$$

$$e^2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)]\} - e \cos[\phi(1 - \epsilon)] \left(2 - \frac{v^2 r}{GM} \right) + \left(1 - \frac{v^2 r}{GM} \right) = 0$$

$$e = \frac{\cos[\phi(1 - \epsilon)] \left(2 - \frac{v^2 r}{GM} \right) \pm \sqrt{\left[\cos[\phi(1 - \epsilon)] \left(2 - \frac{v^2 r}{GM} \right) \right]^2 - 4 \left(1 - \frac{v^2 r}{GM} \right) \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)]\}}}{2\{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)]\}}$$

Voor het startpunt bij het snijpunt van de aarde en de baan geldt dat $r=R$. (R is hier de straal van de aarde) en $\phi = \frac{D}{2R}$.

Uit (2a):

$$\begin{aligned}
r &= \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)]} \\
a(1 - e^2) &= R \left\{ 1 - e \cos \left[\frac{D}{2R} (1 - \epsilon) \right] \right\} \\
a &= \frac{R \left\{ 1 - e \cos \left[\frac{D}{2R} (1 - \epsilon) \right] \right\}}{(1 - e^2)} \tag{3}
\end{aligned}$$

$$e = \frac{\cos \left[\frac{D}{2R} (1 - \epsilon) \right] \left(2 - \frac{v^2 R}{GM} \right) \pm \sqrt{\left[\cos \left[\frac{D}{2R} (1 - \epsilon) \right] \left(2 - \frac{v^2 R}{GM} \right) \right]^2 - 4 \left(1 - \frac{v^2 R}{GM} \right) \{ 1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)] \}}}{2 \{ 1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)] \}}$$

Of hier uit de vergelijkingen (2), (2e) en (3):

$$\begin{aligned}
R \left\{ 1 - e \cos \left[\frac{D}{2R} (1 - \epsilon) \right] \right\} &= a(1 - e^2) = \frac{L^2}{GM} \\
e &= \frac{1 - \frac{L^2}{RGM}}{\cos \left[\frac{D}{2R} (1 - \epsilon) \right]} = \frac{1 - \frac{L^2}{RGM}}{\cos \left[\frac{D}{2R} \left(1 - \frac{3c^2}{v_{x0}^2} \left(\frac{GM}{c^2 R_{earth}} \right)^2 \right) \right]} = \frac{1 - \frac{(v_{x0} R)^2}{RGM}}{\cos \left[\frac{D}{2R} \left(1 - \frac{3c^2}{v_{x0}^2} \left(\frac{GM}{c^2 R} \right)^2 \right) \right]} \\
e &= \frac{1 - \frac{v_{x0}^2 R}{GM}}{\cos \left[\frac{D}{2R} \left(1 - \frac{3c^2}{v_{x0}^2} \left(\frac{GM}{c^2 R} \right)^2 \right) \right]}
\end{aligned}$$

De gegeven snelheid op het punt $r=R$ is v . Dus voor een gegeven snelheid zijn er twee oplossingen voor e .

Hier is h het hoogste punt van de kogelbaan:

$$h = a(1 + e) - R$$

Samen met (3):

$$\begin{aligned}
h &= \frac{R \left\{ 1 - e \cos \left[\frac{D}{2R} (1 - \epsilon) \right] \right\}}{(1 - e^2)} (1 + e) - R = R \left\{ \frac{1 - e \cos \left[\frac{D}{2R} (1 - \epsilon) \right]}{1 - e} - 1 \right\} \\
h &= R \left\{ \frac{1 - e \cos \left[\frac{D}{2R} (1 - \epsilon) \right] - 1 + e}{1 - e} \right\} = R \frac{e \left(1 - \cos \left[\frac{D}{2R} (1 - \epsilon) \right] \right)}{1 - e}
\end{aligned}$$

Hier is D de horizontale afstand van de kogel op aarde, v is de startsnelheid van de kogel en R is de aardstraal.

Zoals hierboven gezien, is $\emptyset = \frac{D}{2R}$.

Of pragmatisch gezien, in ons kogelvoorbeeld met v_{x0} en D als startpunten:

$$h = a(1 + e) - R = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e)} - R = \frac{L^2}{GM(1 - e)} - R = \frac{(v_{x0}R)^2}{GM(1 - e)} - R$$

$$h = \frac{(v_{x0}R)^2}{GM(1 - e)} - R = \frac{(v_{x0}R)^2}{GM(1 - e)} - R$$

Waarbij:

$$e = \frac{1 - \frac{v_{x0}^2 R}{GM}}{\cos \left[\frac{D}{2R} \left(1 - \frac{3c^2}{v_{x0}^2} \left(\frac{GM}{c^2 R} \right)^2 \right) \right]}$$

Afleiding van de omtrek van een ellips:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x = a \cos \beta \text{ en } y = b \sin \beta$$

$$Omtrek = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\beta}\right)^2} d\beta$$

$$= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta} d\beta$$

$$= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 (1 - \cos^2 \beta) + b^2 \cos^2 \beta} d\beta$$

$$= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \beta} d\beta$$

$$Omtrek = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} d\beta$$

Voor de **omtrek van een ellips** bestaat er geen eenvoudige gesloten oplossing. Er zijn benaderingen, zoals de Ramanujan-benadering:

$$Omtrek \approx \pi a \left[3 \left(1 + \sqrt{1 - e^2} \right) - \sqrt{10 \sqrt{1 - e^2} + 3(2 - e^2)} \right]$$

Samenvatting van de gebruikte formules:

De vertrekpunten voor deze afleiding zijn de snelheid van de kogel langs het aardoppervlak ($v_{x0} = v_{per}$ loodrecht op r) en de vereiste afstand D . Dus, op het startpunt waar de kogel is gelanceerd, kennen we de positie en de impuls van de kogel en zouden we in staat moeten zijn om de baan te berekenen.

- $L = v_{x0} \cdot R_{earth}$ dus ϵ is L function of $L(v_{x0})$
- $\epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2}$ dus $\epsilon(v_{x0})$
- $\emptyset = \frac{D}{2R}$ dus $\emptyset(D)$

- $e = \frac{1 - \frac{L^2}{RGM}}{\cos[\emptyset(1-\epsilon)]}$ dus $e(v_{x0}, D)$
- $\alpha = \arctan \left\{ \frac{e(1-\epsilon)\sin[\emptyset(1-\epsilon)]}{1 - e\cos[\emptyset(1-\epsilon)]} \right\}$ dus $e(v_{x0}, D)$
- $a = \frac{L^2}{GM(1-e^2)}$ dus $a(v_{x0}, D)$
- $h = a(1 + e) - R$ dus $h(v_{x0}, D)$

Met deze formules krijgen we de resultaten zoals weergegeven in de onderstaande Excel-tabel:

Gedetailleerde resultaten van berekeningen voor het bovengenoemde voorbeeld. De startpunten zijn de (loodrecht op r) snelheid van de kogel en de af te leggen afstand.

	Newton				Schwarschild			
Vper0(m/s)	5	500	500	1000	5	500	500	1000
Afstand(m)	10	10	2000	2000	10	10	2000	2000
Vr0(m/s)	9.87	0.10	19.73	9.87	9.76	0.10	19.66	9.71
snelheid(m/s)	11	500	500	1000	11	500	500	1000
epsilon					5.25E-03	5E-07	5.25E-07	1E-07
e(centriciteit)					1.000	0.996	0.996	0.984
a(m)					3.18E+06	3.18E+06	3.18E+06	3.20E+06
h(m)	4.93	4.93E-04	19.73	4.93	4.88	4.91E-04	19.66	4.85
alpha(rad)	1.10	0.000	0.04	0.010	1.10	0.000	0.04	0.010
alpha(deg)	63.13	0.0113	2.26	0.565	62.88	0.0113	2.25	0.556
Phi(rad)					7.87E-07	7.87E-07	1.57E-04	1.57E-04
L (ang. mom.)	3.18E+07	3.18E+09	3.18E+09	6.36E+09	3.18E+07	3.18E+09	3.18E+09	6.36E+09
cos(alpha)	0.4520	1.0000	0.9992	1.0000	0.4558	1.0000	0.9992	1.0000
cos(alpha+phi)					0.4558	1.000	0.9992	1.000
Circ.(km)					12662	12894	12894	13346

4 Coördinatensystemen

4.1 Rechthoekig Coördinatensysteem

Om onderscheid te maken tussen punten in de ruimte wordt een coördinatensysteem gecreëerd. De belangrijkste kenmerken van een coördinatensysteem zijn het oorsprongspunt en de coördinaatassen. Het oorsprongspunt kan gekozen worden op basis van wat het meest praktisch is, en voor de assen wordt meestal een Cartesiaans systeem gekozen vanwege de eenvoud ervan.

In een Cartesiaans coördinatensysteem:

- Staan de assen loodrecht op elkaar.
- Zijn de assen onafhankelijk van elkaar, d.w.z. het veranderen van de waarde van één coördinaat heeft geen invloed op de andere.
- Hebben de assen een richting en grootte en kunnen daarom als vectoren worden beschouwd.

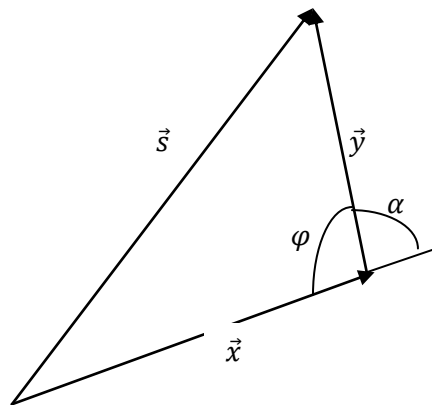
Een punt in de ruimte wordt weergegeven door zijn coördinaten, bijvoorbeeld A (x_a , y_a). De x_a kan worden gevonden door een lijn te tekenen die parallel loopt aan de y-as; waar die lijn de x-as snijdt, ligt het punt x_a . Hetzelfde geldt voor de y_a .

De afstand van punt A tot het oorsprongspunt kan worden gevonden met Pythagoras. (A-oorsprong)² = $x_a^2 + y_a^2$. Als men werkt met een lijnstuk tussen A en B, dan is de lengte: $(A-B)^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2$. Het voordeel hiervan is dat de lengte van het lijnstuk onafhankelijk is van het willekeurig gekozen oorsprongspunt; d.w.z. de waarden van x_a , y_a , x_b , y_b veranderen wel, maar het verschil A-B, wat de lengte van het lijnstuk is, verandert niet.

4.2 Niet-Rechthoekig Coördinatensysteem

Om praktische redenen kan ook een coördinatensysteem worden gekozen waarvan de assen niet orthogonaal zijn. Ook hier moeten we ons ervan bewust zijn dat het lijnstuk s is opgebouwd uit vectoren:

$$\vec{s} = \vec{x} + \vec{y}$$



De grootte s van $\vec{s}$ kan worden gevonden door het inproduct van $\vec{s}$ met zichzelf:

$$\vec{s} \cdot \vec{s} = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y}$$

$$s^2 = x^2 + (2 \cos \alpha)xy + y^2$$

$$\cos \alpha = \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$$

$$s^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi$$

Dit is de bekende cosinusregel. Dus, naast de kwadraten van de coördinaten maakt ook het product van de coördinaten deel uit van de vergelijking.

4.3 Gekromde Coördinaten

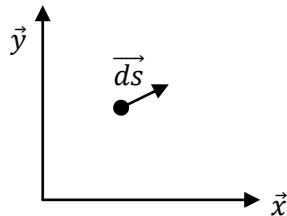
In plaats van coördinaatassen die niet orthogonaal zijn, kan het ook praktisch zijn om gekromde coördinaten te gebruiken. Werken met deze coördinaten is uiteraard complexer, maar Einstein hanteerde de volgende benadering: Een gekromde lijn kan worden beschouwd als een lijn opgebouwd uit oneindig kleine rechte lijnen. Door te kijken naar een oneindig klein gebied kunnen deze gekromde coördinaten worden beschouwd als een lokaal coördinatensysteem met rechte (lineaire) coördinaten, die echter niet per se rechthoekig zijn.

Omdat het coördinatensysteem hier oneindig kleine coördinaten betreft, worden de coördinaten aangeduid als dx , dy enzovoort. Bovendien hebben deze coördinaten coëfficiënten, en deze coëfficiënten bevatten informatie over de kromming van de coördinatensystemen. In het geval van kromming zijn deze coëfficiënten dus geen constante meer, maar parameters die afhankelijk zijn van hun locatie langs de coördinatensystemen.

Er wordt gezegd dat zwaartekracht de coördinatensystemen buigt en zo de ruimtetijd vervormt, wat een zwaartekrachtsveld creëert en daardoor versnelling veroorzaakt. Door echter een gekromd coördinatensysteem zo te kiezen dat het zich beweegt en buigt in de richting van het zwaartekrachtsveld, wordt er geen kracht of zwaartekracht ervaren; dus op dezelfde manier als in de speciale relativiteitstheorie een bewegend coördinatensysteem werd gekozen om de snelheid van het bewegende object te neutraliseren.

4.4 Algemene Vorm voor een Coördinatensysteem

Laten we een vergelijking afleiden voor de relatie tussen een lijnsegment en zijn gebogen coördinatensysteem.



Zoals eerder vermeld is een oneindig klein lijnsegment $d\vec{s}$ een vector, en de grootte kan worden berekend zoals hierboven getoond:

$$\vec{ds} \cdot \vec{ds} = (\vec{dx} + \vec{dy}) \cdot (\vec{dx} + \vec{dy}) = \vec{dx} \cdot \vec{dx} + \vec{dx} \cdot \vec{dy} + \vec{dy} \cdot \vec{dx} + \vec{dy} \cdot \vec{dy}$$

(voor een lineair, niet – orthogonaal systeem)

Om een meer algemene vorm (niet per se orthogonaal) te hebben, wordt aangenomen dat elke term een coëfficiënt $g_{\mu\nu}$ heeft:

$$ds^2 = g_{xx} dx dx + g_{xy} dx dy + g_{yx} dy dx + g_{yy} dy dy$$

Hier, in het voorbeeld van de cosinusregel hierboven, is:

$$g_{xx} = g_{yy} = 1 \text{ and } g_{xy} = g_{yx} = -\cos \varphi$$

De $g_{\mu\nu}$ wordt de **metrische tensor** genoemd en kan, in dit tweedimensionale coördinatensysteem, worden beschouwd als een matrix met 2x2 elementen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos \varphi \\ -\cos \varphi & 1 \end{pmatrix}$$

Voor een algemene vorm:

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

In Einstein notatie:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Voor een vierdimensionaal ruimtetijd-coördinatensysteem kunnen μ en ν de waarden 0, 1, 2, 3 aannemen, ofwel ct, x, y, z. Deze formule toont het product van elke coördinaat en de kruisproducten tussen elk coördinaatpaar. In het geval dat het coördinatensysteem orthogonaal is, geldt dat $\mu = \nu$, dat wil zeggen voor $\mu \neq \nu$ is $g_{\mu\nu} = 0$. Zoals eerder gezegd bestaat dit lokale coördinatensysteem uit rechte, lineaire lijnen, maar de informatie over de kromming gaat niet verloren en maakt deel uit van de elementen $g_{\mu\nu}$ waarbij de grootte $g_{\mu\nu}$ varieert voor iedere locatie.

Als een ander coördinatensysteem wordt gebruikt, beschrijft het nog steeds hetzelfde lijnsegment. In dat geval wordt de relatie tussen de twee coördinatensystemen weergegeven in:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g_{\alpha\beta}(y) dy^\alpha dy^\beta$$

Dus de coördinaten en coëfficiënten veranderen per systeem maar ds blijft ongewijzigd.

4.5 Transformatie tussen twee Coördinatensystemen

Zoals eerder vermeld, kan bij een gebogen coördinatensysteem "lokaal", in een oneindig klein gebied, een coördinatensysteem met rechte lijnen worden gebruikt. Voor een vierdimensionaal coördinatensysteem heeft elke nieuwe coördinaat, in het nieuwe x -stelsel, een lineaire relatie met alle oude coördinaten, in het oude y -stelsel, volgens de vergelijking:

$$dx^0 = \frac{\partial x^0}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial x^0}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^0}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x^0}{\partial y^3} dy^3$$

Hetzelfde geldt voor de drie andere coördinaten en dit leidt tot de algemene formule:

$$dx^m = \frac{\partial x^m}{\partial y^r} dy^r$$

De sommatie gebeurt over de herhaalde index r .

4.5.1 Uitgebreide Toelichting op de Metrische Tensor

We beginnen met een Cartesiaans coördinatenstelsel, dat in dit geval vergelijkbaar is met de Minkowski-vergelijking (zie hoofdstuk [4.9.1](#) en [Appendix 7.1](#) vergelijking [11a](#)) in de speciale relativiteitstheorie:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Nu noemen we:

$$cdt = dx^0, dx = dx^1, dy = dx^2, dz = dx^3$$

(alle hebben de dimensie van meters)

De coördinaten worden aangegeven met indices. In een meer algemene vorm:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

De metrische tensor is hier:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dus:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Nu gaan we over naar een willekeurig coördinatenstelsel dy^α en $dy^\beta \Rightarrow (dy^0, dy^1, dy^2, dy^3)$:

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^3} dy^3$$

Of:

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} dy^\alpha$$

En:

$$dx^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} dy^\beta$$

Volgens de kettingregel, aangezien dx^μ (en dx^ν) functies zijn van dy^0, dy^1, dy^2, dy^3 :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Dit wordt dan:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} dy^\alpha dy^\beta$$

Hieruit volgt dat:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}$$

Dus dan geldt:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$$

Vervolgens gaan we over naar een ander willekeurig coördinatenstelsel en volgen we dezelfde benadering:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Dit resulteert in een algemene transformatievorm tussen willekeurige coördinatenstelsels of tussen de metrische tensoren:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(y)$$

4.6 Transformatie tussen Cartesiaanse en Polaire (infinitesimale) Coördinaten

Als voorbeeld zullen we nu de transformatie uitvoeren tussen Cartesiaanse en polaire coördinaten.

We gaan ervan uit dat de lezer de volgende relatie tussen polaire en Cartesiaanse coördinaten kent (zie onderstaande afbeelding):

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta$$

Afleiding van dx , dy en dz :

$$\vec{dx} = \sin \theta \cos \varphi \vec{dr} + r \cos \theta \cos \varphi \vec{d\theta} - r \sin \theta \sin \varphi \vec{d\varphi}$$

$$\vec{dy} = \sin \theta \sin \varphi \vec{dr} + r \cos \theta \sin \varphi \vec{d\theta} + r \sin \theta \cos \varphi \vec{d\varphi}$$

$$\vec{dz} = \cos \theta \vec{dr} - r \sin \theta \vec{d\theta}$$

Om de grootte van dx , dy en dz te bepalen, nemen we het inwendig product van elk van hen:

$$dx^2 = \vec{dx} \cdot \vec{dx}; \quad dy^2 = \vec{dy} \cdot \vec{dy}; \quad dz^2 = \vec{dz} \cdot \vec{dz}$$

Omdat de coördinaten r , θ en φ loodrecht op elkaar staan, zijn de kruisproducten nul, wat resulteert in:

$$dx^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi dr^2 + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi d\varphi^2$$

$$dy^2 = \sin^2 \theta \sin^2 \varphi dr^2 + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi d\varphi^2$$

$$dz^2 = \cos^2 \theta dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2$$

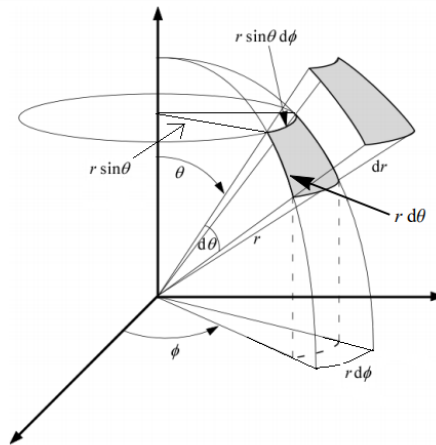
Nu de sommatie van $dx^2 + dy^2 + dz^2$:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi dr^2 + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi dr^2 + \cos^2 \theta dr^2 + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi d\theta^2 + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi d\varphi^2$$

Dit geeft als resultaat:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (1)$$

Dit beschrijft de transformatie van een stelsel met Cartesiaanse coördinaten naar een stelsel met polaire coördinaten.



Voor een volume element $dx dy dz$ geldt:

$$dV = dx dy dz = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Voor het totale volume van een bol geldt dan:

$$V = \iiint r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$V = \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^R \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

4.7 Oefening om de Metrische Transformatieformule formeel toe te passen:

Hier volgen de stappen die laten zien hoe de metrische transformatieformule wordt toegepast bij de transformatie van een Cartesiaans coördinatensysteem naar een polair coördinatensysteem, met behulp van de algemene formules die eerder zijn besproken.

Algemene formules

1. De relatie tussen de "nieuwe" en "oude" coördinaten:

$$dx^m = \frac{\partial x^m}{\partial y^r} dy^r$$

2. De relatie tussen een lijnsegment en de (Cartesiaanse) coördinaten:

$$ds^2 = \eta_{mn} d\xi^m d\xi^n$$

3. De relatie tussen twee verschillende coördinatensystemen:

$$ds^2 = g_{mn}(x) dx^m dx^n = g_{pq}(y) dy^p dy^q$$

4. De relatie tussen de "nieuwe" en de "oude" metrische tensor:

$$g_{pq}(y) = g_{mn}(x) \frac{dx^m}{dy^p} \frac{dx^n}{dy^q}$$

Transformatie van een Cartesiaans naar een polair coördinatensysteem:

We beschouwen de transformatie van Cartesiaanse naar polaire coördinaten met de lijnelementen:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

De corresponderende lijnelementen in polaire coördinaten zijn (met [vergelijking 4 6 1](#)):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

De oude metrische tensor voor het Cartesiaanse coördinatensysteem is:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hier is dus $g_{00} = 1$, $g_{11} = -1$, $g_{22} = -1$ en $g_{33} = -1$ voor Cartesiaanse elementen en de overige elementen zijn nul.

Nu willen we de nieuwe metrische tensor voor het polaire coördinatensysteem vinden:

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -1, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

Transformatieformule toepassen

Zoals genoemd in een vorig hoofdstuk zijn de relaties tussen de polaire en Cartesiaanse coördinaten als volgt:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta$$

We passen de transformatieformule toe:

$$dx^m = \frac{\partial x^m}{\partial y^r} dy^r$$

Wanneer we deze formule volledig uitschrijven dan ziet het er als volgt uit:

$$dt = \frac{\partial t}{\partial t} dt + \frac{\partial t}{\partial r} dr + \frac{\partial t}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial t}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi$$

Laten we nu specifiek de afgeleiden berekenen voor de transformatie:

- $dt = dt$
- $dx = \sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi$
- $dy = \sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi$
- $dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$

Dus de elementen van de metrische tensor zijn:

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial t}{\partial t} = 1 & \frac{\partial t}{\partial r} = 0 & \frac{\partial t}{\partial \theta} = 0 & \frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial t} = 0 & \frac{\partial x}{\partial r} = +\sin \theta \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \theta} = +r \cos \theta \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 0 & \frac{\partial y}{\partial r} = +\sin \theta \sin \varphi & \frac{\partial y}{\partial \theta} = +r \cos \theta \sin \varphi & \frac{\partial y}{\partial \varphi} = +r \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial t} = 0 & \frac{\partial z}{\partial r} = +\cos \theta & \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta & \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \end{array}$$

Nu passen we de metrische tensor transformatieformule toe:

$$g_{pq}(y) = g_{mn}(x) \frac{dx^m}{dy^p} \frac{dx^n}{dy^q}$$

We werken nu de metrische tensor elementen uit:

$$g_{00}(y) = g_{00}(x) \frac{dx^0}{dy^0} \frac{dx^0}{dy^0} + g_{01}(x) \frac{dx^0}{dy^0} \frac{dx^1}{dy^0} + g_{02}(x) \frac{dx^0}{dy^0} \frac{dx^2}{dy^0} + g_{03}(x) \frac{dx^0}{dy^0} \frac{dx^3}{dy^0} +$$

$$\begin{aligned}
& g_{10}(x) \frac{dx^1}{dy^0} \frac{dx^0}{dy^0} + g_{11}(x) \frac{dx^1}{dy^0} \frac{dx^1}{dy^0} + g_{12}(x) \frac{dx^1}{dy^0} \frac{dx^2}{dy^0} + g_{13}(x) \frac{dx^1}{dy^0} \frac{dx^3}{dy^0} + \\
& g_{20}(x) \frac{dx^2}{dy^0} \frac{dx^0}{dy^0} + g_{21}(x) \frac{dx^2}{dy^0} \frac{dx^1}{dy^0} + g_{22}(x) \frac{dx^2}{dy^0} \frac{dx^2}{dy^0} + g_{23}(x) \frac{dx^2}{dy^0} \frac{dx^3}{dy^0} + \\
& g_{30}(x) \frac{dx^3}{dy^0} \frac{dx^0}{dy^0} + g_{31}(x) \frac{dx^3}{dy^0} \frac{dx^1}{dy^0} + g_{32}(x) \frac{dx^3}{dy^0} \frac{dx^2}{dy^0} + g_{33}(x) \frac{dx^3}{dy^0} \frac{dx^3}{dy^0}
\end{aligned}$$

Al voorbeeld vullen we nu de juiste polaire en cartesische coördinaten in:

$$\begin{aligned}
g_{rr} &= g_{tt} \frac{dt}{dr} \frac{dt}{dr} + g_{tx} \frac{dt}{dr} \frac{dx}{dr} + g_{ty} \frac{dt}{dr} \frac{dy}{dr} + g_{tz} \frac{dt}{dr} \frac{dz}{dr} + \\
& g_{xt} \frac{dx}{dr} \frac{dt}{dr} + g_{xx} \frac{dx}{dr} \frac{dx}{dr} + g_{xy} \frac{dx}{dr} \frac{dy}{dr} + g_{xz} \frac{dx}{dr} \frac{dz}{dr} + \\
& g_{yt} \frac{dy}{dr} \frac{dt}{dr} + g_{yx} \frac{dy}{dr} \frac{dx}{dr} + g_{yy} \frac{dy}{dr} \frac{dy}{dr} + g_{yz} \frac{dy}{dr} \frac{dz}{dr} + \\
& g_{zt} \frac{dz}{dr} \frac{dt}{dr} + g_{zx} \frac{dz}{dr} \frac{dx}{dr} + g_{zy} \frac{dz}{dr} \frac{dy}{dr} + g_{zz} \frac{dz}{dr} \frac{dz}{dr}
\end{aligned}$$

Omdat het coördinaten systeem hier een orthogonaal systeem is, zijn alleen die elementen met gelijke indices niet nul.

Dus de matrix hierboven wordt uiteindelijk:

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= g_{tt} \frac{dt}{dt} \frac{dt}{dt} + g_{xx} \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} + g_{yy} \frac{dy}{dt} \frac{dy}{dt} + g_{zz} \frac{dz}{dt} \frac{dz}{dt} \\
g_{tt} &= 1 + 0 + 0 + 0 = 1 \\
g_{rr} &= g_{tt} \frac{dt}{dr} \frac{dt}{dr} + g_{xx} \frac{dx}{dr} \frac{dx}{dr} + g_{yy} \frac{dy}{dr} \frac{dy}{dr} + g_{zz} \frac{dz}{dr} \frac{dz}{dr} \\
g_{rr} &= 0 - 1(+\sin \theta \cos \varphi)^2 - 1(+\sin \theta \sin \varphi)^2 - 1(+\cos \theta)^2 = -\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi = -1 \\
g_{\theta\theta} &= g_{tt} \frac{dt}{d\theta} \frac{dt}{d\theta} + g_{xx} \frac{dx}{d\theta} \frac{dx}{d\theta} + g_{yy} \frac{dy}{d\theta} \frac{dy}{d\theta} + g_{zz} \frac{dz}{d\theta} \frac{dz}{d\theta} \\
g_{\theta\theta} &= 0 - 1(+r \cos \theta \cos \varphi)^2 - 1(+r \cos \theta \sin \varphi)^2 - 1(-r \sin \theta)^2 = -r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = -r^2 \\
g_{\varphi\varphi} &= g_{tt} \frac{dt}{d\varphi} \frac{dt}{d\varphi} + g_{xx} \frac{dx}{d\varphi} \frac{dx}{d\varphi} + g_{yy} \frac{dy}{d\varphi} \frac{dy}{d\varphi} + g_{zz} \frac{dz}{d\varphi} \frac{dz}{d\varphi} \\
g_{\varphi\varphi} &= 0 - 1(-r \sin \theta \sin \varphi)^2 - 1(+r \sin \theta \cos \varphi)^2 - 0 = -r^2 \sin^2 \varphi
\end{aligned}$$

Conclusie

Dus de transformatie van een Cartesiaanse naar een polaire metrische tensor levert de volgende elementen op:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 & g_{11} &= -1 & g_{22} &= -1 & g_{33} &= -1 \\ g_{tt} &= 1 & g_{rr} &= -1 & g_{\theta\theta} &= -r^2 & g_{\varphi\varphi} &= -r^2 \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

Of in matrix vorm:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Dit komt overeen met de metriek van een polair coördinatensysteem in een driedimensionale ruimte.

4.8 Verdere Overwegingen over Co- en Contravariante Transformaties

4.8.1 Inleiding

In deze sectie berekenen we de transformatie tussen basisvectoren en de transformatie tussen vectoren, samen met hun respectieve relaties.

4.8.2 Covariante Transformatie van Basisvectoren en Duale Vectoren (of één-vormen):

De getransformeerde basisvectoren $\vec{e}'_1$ en $\vec{e}'_2$ zijn gerelateerd aan de oorspronkelijke basisvectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ door een lineaire transformatie matrix A:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= a_{11} \vec{e}_1 + a_{12} \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 &= a_{21} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 \end{aligned}$$

Dit kan in matrixvorm worden geschreven als:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}$$

Of korter:

$$\vec{e}' = A \vec{e}$$

4.8.2.1 Inverse Transformatie

Om de inverse transformatie (van het getransformeerde naar het oorspronkelijke systeem) te vinden, lossen we $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ op in termen van $\vec{e}'_1$ en $\vec{e}'_2$.

Nu berekenen we de inverse van het bovenstaande:

$$a_{22}\vec{e}'_1 = a_{11}a_{22}\vec{e}_1 + a_{12}a_{22}\vec{e}_2$$

$$a_{12}\vec{e}'_2 = a_{12}a_{21}\vec{e}_1 + a_{12}a_{22}\vec{e}_2$$

We trekken nu de twee vergelijkingen van elkaar af:

$$a_{22}\vec{e}'_1 - a_{12}\vec{e}'_2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\vec{e}_1$$

Dit geeft ons de uitdrukking voor $\vec{e}_1$:

$$\vec{e}_1 = \frac{a_{22}\vec{e}'_1 - a_{12}\vec{e}'_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$a_{21}\vec{e}'_1 = a_{11}a_{21}\vec{e}_1 + a_{12}a_{21}\vec{e}_2$$

$$a_{11}\vec{e}'_2 = a_{11}a_{21}\vec{e}_1 + a_{11}a_{22}\vec{e}_2$$

Nu vermenigvuldigen we de eerste vergelijking met a_{21} en de tweede met a_{11} en trekken deze weer van elkaar af om $\vec{e}_2$ te vinden:

$$a_{21}\vec{e}'_1 - a_{11}\vec{e}'_2 = (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})\vec{e}_2$$

Dus de uitdrukking voor $\vec{e}_2$ is:

$$\vec{e}_2 = \frac{-a_{21}\vec{e}'_1 + a_{11}\vec{e}'_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

In matrixvorm is de inverse transformatie:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix}$$

Of korter:

$$\vec{e} = (A^{-1})\vec{e}'$$

4.8.2.2 Controle van de Inverse Transformatie

We kunnen controleren of A en A^{-1} inderdaad elkaars inversen zijn door de twee matrices met elkaar te vermenigvuldigen, en te kijken of ze de eenheidsmatrix opleveren:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Nu vermenigvuldigen we A^{-1} met A :

$$\frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\begin{pmatrix} a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12} & a_{22}a_{21}-a_{21}a_{22} \\ -a_{12}a_{11}+a_{11}a_{12} & -a_{12}a_{21}+a_{11}a_{22} \end{pmatrix}}{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})} = \\
& \frac{\begin{pmatrix} a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{12}a_{21}+a_{11}a_{22} \end{pmatrix}}{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})} = \\
& \frac{(a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})} =
\end{aligned}$$

Dit vereenvoudigt tot de eenheidsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dus de inverse transformatie is correct *q.e.d.*

4.8.2.3 Conclusie

We hebben de covariante transformatie voor basisvectoren en de inverse ervan afgeleid in een tweedimensionale ruimte. We hebben gecontroleerd dat de transformatie en de inverse elkaar opheffen tot de eenheidsmatrix, wat de consistentie van de transformatie tussen basisvectoren in verschillende coördinatensystemen bevestigt.

4.8.3 Contravariante Transformatie van Vectoren:

Omdat de vector $\vec{V}$ hetzelfde blijft, in zowel het oorspronkelijke als het getransformeerde coördinatensysteem, veranderen alleen de componenten van de vector. We schrijven de vector $\vec{V}$ als volgt:

$$\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2$$

$$\vec{V} = V'_1 \vec{e}'_1 + V'_2 \vec{e}'_2$$

Door de basisvectoren $\vec{e}'_1$ en $\vec{e}'_2$ uit te drukken in termen van $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$, krijgen we:

$$\vec{V} = V_1 \left(\frac{a_{22}\vec{e}'_1 - a_{12}\vec{e}'_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right) + V_2 \left(\frac{-a_{21}\vec{e}'_1 + a_{11}\vec{e}'_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right)$$

Dit kan worden herschreven als:

$$\vec{V} = \left(\frac{a_{22}V_1 - a_{12}V_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right) \vec{e}'_1 + \left(\frac{-a_{21}V_1 + a_{11}V_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right) \vec{e}'_2$$

Door de termen samen te voegen:

$$\vec{V} = \frac{(a_{22}V_1 - a_{21}V_2)\vec{e}'_1 + (-a_{12}V_1 + a_{11}V_2)\vec{e}'_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

En we weten ook dat:

$$\vec{V} = V'_1 \vec{e}'_1 + V'_2 \vec{e}'_2$$

Hieruit volgen de transformaties voor de componenten van de vector:

$$V'_1 = \frac{(a_{22}V_1 - a_{21}V_2)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$V'_2 = \frac{(-a_{12}V_1 + a_{11}V_2)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

In matrixvorm kunnen we dit schrijven als:

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Dus:

$$\vec{V}' = (A^{-1})^T \vec{V}$$

Nu voor de inverse transformatie, beginnend met de getransformeerde vectorcomponenten:

$$\vec{V} = V'_1 \vec{e}'_1 + V'_2 \vec{e}'_2$$

$$\vec{V} = V'_1 (a_{11} \vec{e}_1 + a_{12} \vec{e}_2) + V'_2 (a_{21} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2)$$

Dit geeft:

$$\vec{V} = (a_{11}V'_1 + a_{21}V'_2) \vec{e}_1 + (a_{12}V'_1 + a_{22}V'_2) \vec{e}_2$$

Wat overeenkomt met:

$$\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2$$

Hieruit volgen de relaties voor de oorspronkelijke vectorcomponenten:

$$V_1 = a_{11}V'_1 + a_{21}V'_2$$

$$V_2 = a_{12}V'_1 + a_{22}V'_2$$

In matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix}$$

De basisvectoren transformeren volgens:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Daarentegen transformeren de vectorcomponenten in de tegengestelde richting:

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

4.8.4 Samenvatting:

$$\vec{e}' = A\vec{e}$$

$$\vec{e} = (A^{-1})\vec{e}'$$

$$\vec{V}' = (A^{-1})^T \vec{V}$$

Dus als de basis vectoren (covariante vectoren) transformeren met:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

Terwijl de relatie tussen:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix}$$

is

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = A^T$$

De getransponeerde van A:

Dan transformeren de contravariante vectoren volgens:

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} = (A^{-1})^T$$

Dit is de inverse en zijn getransponeerde.

4.9 Overwegingen over de Minkowski- en Schwarzschild-formules

4.9.1 Minkowski

De Minkowski-formule wordt gebruikt in de speciale relativiteitstheorie, waar de effecten van massa en versnelling worden genegeerd. In deze context bewegen referentiestelsels uniform, met constante snelheid ten opzichte van elkaar, en is het coördinatenstelsel lineair.

Veronderstel een punt K in ruimtetijd met een eigen coördinatensysteem. Het punt K blijft in de oorsprong van zijn coördinatensysteem. Het enige dat dan verandert, is de tijd. En omdat het zich in ruimtetijd bevindt, is de afstand, of het interval, $s=ct$. Een waarnemer bevindt zich op een andere locatie met zijn/haar eigen coördinatensysteem, maar er is een relatieve beweging tussen de twee coördinatensystemen. De relatie tussen de twee systemen is:

$$v^2 = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{t^2}$$

Dit betekent dat de waarnemer K ziet bewegen met een snelheid v .

In de Minkowski-formule geldt:

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Voor een klein segment:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Dit kleine segment is dus eigenlijk de raaklijn aan de originele formule. We kunnen de totale lijn dus beschouwen te zijn opgebouwd uit allemaal rechte stukjes (raak)lijnen. Ook al zou deze lijn gekromd zijn zoals we later zullen beschouwen.

We moeten beseffen dat t, x, y en z een grootte en richting hebben; ze zijn vectoren. Het vinden van de grootte van s betekent het optellen van de vier vectoren. Als dit coördinatensysteem een orthogonaal systeem is, kan de stelling van Pythagoras worden toegepast op het ruimtedeel. Als we het tijdsdeel beschouwen als complex $icdt$, en voor de linkerkant van de formule $ds=icdt$, dan krijgen we door de coördinaten te kwadrateren de Minkowski-formule.

De formule geeft aan dat de afstand die K in zijn eigen K -stelsel aflegt, dezelfde is als de afstand die K aflegt zoals waargenomen door de waarnemer in het bewegende stelsel aan de rechterkant van de formule.

Om een algemene vorm te vinden voor de relatie tussen het lijnsegment s en zijn coördinaten krijgen we:

$$\vec{s} = a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2$$

Om de grootte van s te vinden, berekenen we het inproduct van s door s met zichzelf te vermenigvuldigen:

$$\begin{aligned} \vec{s} \cdot \vec{s} &= (a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2) \cdot (a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2) \\ s^2 &= a_1^2 x_1^2 + a_1 a_2 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 + a_1 a_2 \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 + a_2^2 x_2^2 \end{aligned}$$

Dit was voor twee dimensies, maar om dit te generaliseren naar vier dimensies:

$$s^2 = \sum_{\mu} \sum_{\nu} g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$$

Of in de notatie van Einstein (som over de herhaalde lage en hoge indices):

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$$

Wanneer een orthogonaal coördinatensysteem wordt gebruikt, verdwijnen alle producten waarbij $\mu \neq \nu$. Als alleen een infinitesimaal klein lokaal "gebied" wordt beschouwd, wordt dx in plaats van x gebruikt, en hetzelfde geldt voor de overige coördinaten.

Ten slotte, wanneer een orthogonaal coördinatensysteem wordt gebruikt, resulteert de vergelijking in een Minkowski- of Schwarzschild-vorm:

$$ds^2 = (cdx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

$$ds^2 = g_{00}(cdx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2$$

Voor Minkowski zijn de coëfficiënten (tensorcomponenten) $g_{00} = 1$ en $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$

Wat betekent de Minkowski-formule eigenlijk?

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

De ds -term vertegenwoordigt een object dat zich in zijn eigen coördinatensysteem bevindt, waarbij alleen de tijd τ voortschrijdt. Een waarnemer bevindt zich in de oorsprong van het systeem t, x, y, z , en neemt waar dat ds beweegt met een snelheid van:

$$v^2 = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2}$$

ten opzichte van de oorsprong van het coördinatensysteem van de waarnemer. Een andere waarnemer in het t', x', y', z' -systeem neemt waar dat ds beweegt met een snelheid van:

$$v'^2 = \frac{(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)}{dt'^2}$$

Dus als de waarnemer zich in het t, x, y, z -systeem bevindt, wanneer s verandert met ds , dan ervaart de waarnemer een verandering in dt, dx, dy, dz . Als we teruggaan naar de t, x, y, z -assen, dan zijn x, y, z de afstanden tot s en t de tijd in het t, x, y, z -systeem, terwijl de tijd van $ds = cd\tau$ anders kan veranderen ten opzichte van cdt volgens:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{c^2 dt^2}{\gamma^2}$$

Hier is τ de zogenaamde eigen tijd, dat wil zeggen de tijd van een bewegende klok die zich in de oorsprong van zijn eigen meebewegende coördinatenstelsel bevindt.

De relatie tussen de eigen tijd τ in het ds -systeem en de waarnemer is:

$$d\tau^2 = \frac{dt^2}{\gamma^2}$$

$$dt^2 = \gamma^2 d\tau^2$$

Waarbij dus:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Omdat $\gamma \geq 1$, is $d\tau$ altijd gelijk aan of kleiner dan dt . Dus de klok van ds loopt of gelijk of langzamer dan de klok van de waarnemer.

4.9.2 Transformaties uitgevoerd door Schwarzschild

De Schwarzschild-vergelijking is vergelijkbaar met de Minkowski-vergelijking in die zin dat nu ook de effecten van massa en versnelling in aanmerking worden genomen. Dit leidt tot een gekromde ruimtetijd en praktisch gezien tot een niet-lineair coördinatenstelsel, rekening houdend met deze gekromde ruimtetijdgeografie.

Laten we nu de Schwarzschild-vergelijking bekijken en de transformatie naar nieuwe t, x, y en z –coördinaten.

Schwarzschild begint met Cartesiaanse coördinaten en transformeert deze naar poolcoördinaten volgens een methode die resulteert in de volgende uitdrukking voor het ruimtetijd-interval:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Hierbij merkt hij op dat het product van de metrische tensorcomponenten, de determinant g , niet gelijk is aan -1 , zoals Einstein dat had gewenst:

$$g = \sigma^2 \cdot \left(\frac{-1}{\sigma^2}\right) \cdot (-r^2) \cdot (-r^2 \sin^2 \theta) = -r^4 \sin^2 \theta$$

Om aan de voorwaarde $g=-1$, te voldoen, wil hij een transformatie uitvoeren waarbij:

$$\frac{dr}{dx_1} = \frac{1}{r^2}, \quad \frac{d\theta}{dx_2} = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \frac{d\phi}{dx_3} = 1$$

Schwarzschild merkt op: "De nieuwe variabelen zijn de *poolcoördinaten met determinant 1*". Om deze afgeleiden te verkrijgen, vindt hij de volgende relaties:

$$x_1 = \frac{r^3}{3}, \quad x_2 = -\cos \theta, \quad x_3 = \phi$$

Hij voert dan de transformatie uit, wat leidt tot:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dx_1^2}{r^4 \sigma^2} - r^2 \frac{1}{\sin^2 \theta} dx_2^2 - r^2 \sin^2 \theta dx_3^2$$

Omdat $x_2 = -\cos \theta$, geldt:

$$x_2^2 = \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - x_2^2$$

De formule voor het ruimtetijd-interval wordt dan:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dx_1^2}{r^4 \sigma^2} - r^2 \frac{1}{1 - x_2^2} dx_2^2 - r^2 (1 - x_2^2) dx_3^2$$

Dus de metrische tensorcomponenten zijn:

$$g_{00} = \sigma^2 \quad g_{11} = -\frac{1}{r^4 \sigma^2} \quad g_{22} = \frac{-r^2}{1 - x_2^2} \quad g_{33} = -r^2(1 - x_2^2)$$

Nu geldt inderdaad dat $g=-1$, en de uitgevoerde transformaties zijn geldig. In het speciale geval waarbij $\theta = 90^\circ$, geldt dat $x_2 = 0$.

4.10 Schwarzschild's: "On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory"

Het doel van Schwarzschild was om een vergelijking te vinden die voldoet aan de veldvergelijkingen van Einstein in vacuüm. De vergelijking beschrijft een punt dat langs een geodetische lijn beweegt in een variëteit die wordt gekenmerkt door het lijnsegment ds .

De voorwaarden die moeten worden vervuld zijn:

1. Alle componenten zijn onafhankelijk van de tijd x_4 .
2. De vergelijkingen $g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0$ gelden exact voor $\rho = 1, 2, 3$.
3. De oplossing is ruimtelijk symmetrisch met betrekking tot de oorsprong van het coördinatensysteem, in die zin dat dezelfde oplossing opnieuw wordt gevonden na een orthogonale transformatie (rotatie) van x_1, x_2, x_3
4. De componenten van de metrische tensor $g_{\mu\nu}$ verdwijnen op oneindige afstand, met uitzondering van de volgende limieten:

$$g_{44} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$$

De initiële vergelijking was gebaseerd op rechthoekige coördinaten:

$$ds^2 = Fdt^2 - G(dx^2 + dy^2 + dz^2) - H(xdx + ydy + zdz)^2$$

Schwarzschild gaat nu over naar polaire coördinaten, waarbij hij de volgende transformaties gebruikt:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta;$$

Het lijnsegment in polaire coördinaten wordt nu:

$$ds^2 = Fdt^2 - G(dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - Hr^2 dr^2$$

Wat nu vereenvoudigd wordt tot:

$$ds^2 = Fdt^2 - (G + Hr^2)dr^2 - Gr^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

Omdat de determinant van de metriek in dit geval niet gelijk is aan -1, wordt een verdere transformatie uitgevoerd naar nieuwe variabelen en polaire coördinaten met determinant 1:

$$x_1 = \frac{r^3}{3}, \quad x_2 = -\cos \vartheta, \quad x_3 = \varphi,$$

Dit resulteert in de uitdrukking:

$$ds^2 = F dt^2 - \left(\frac{G}{r^4} + \frac{H}{r^2} \right) dx_1^2 - Gr^2 \left[\frac{dx_2^2}{1-x_2^2} + dx_3^2(1-x_2^2) \right]$$

Door de Einstein-veldvergelijkingen op te lossen, worden de coëfficiënten gevonden, wat resulteert in de bekende Schwarzschild-vergelijking:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (12)$$

Deze vergelijking beschrijft de ruimtetijd rond een massapunt. Schwarzschild begon zijn afleiding in Cartesiaans coördinaten, maar de uiteindelijke vergelijking (12) wordt meestal in polaire coördinaten gebruikt. De vergelijkbare vorm in Cartesiaanse coördinaten, die zelden wordt gebruikt, is:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{\frac{2GM}{c^2 r}}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) r^2} (xdx + ydy + zdz)^2 \quad (13)$$

Hoewel de Schwarzschild-vergelijking dus ook in Cartesiaanse coördinaten kan worden uitgedrukt, wordt deze vorm zelden gebruikt. De meer gangbare weergave in polaire coördinaten is veel handiger bij het analyseren van de geometrie van ruimtetijd rond een sferisch symmetrisch massapunt, zoals bij een zwart gat of een ster. Dit komt omdat de polaire coördinaten beter passen bij de sferische symmetrie van het probleem.

Bronnen voor de afleiding van de Schwarzschild-vergelijking:

- **Schwarzschild, K.** "On the Gravitational Field of a Point-Mass, According to Einstein's Theory," gepubliceerd op 13 januari 1916. In dit werk presenteerde Schwarzschild zijn oplossing van de veldvergelijkingen van Einstein voor een massapunt in vacuüm.
- **Oas**, verwijzend naar andere bijdragen of verdere analyses van de Schwarzschild-oplossing.

(zie verder bij het hoofdstuk Bibliografie aan het eind van dit document)

De Schwarzschild-oplossing vormt een fundamentele bijdrage aan de Algemene Relativiteitstheorie en wordt vooral gebruikt in het bestuderen van zwarte gaten en andere astrofysische objecten met sterke zwaartekrachtsvelden.

5 Controle of de Schwarzschild Metriek voldoet aan de Einstein Veldvergelijkingen

De algemene formule voor de Einstein veldvergelijking is, zoals we eerder hebben gezien:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

In het algemeen is λ heel klein en alleen relevant voor berekeningen van het hele universum. Dus wordt doorgaans de volgende formule gebruikt:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Het linkerdeel van de formule stelt de geometrie voor terwijl het rechterdeel wordt gevormd door de massa en energie. Wanneer de berekeningen worden gedaan voor een vacuüm, dus buiten een massa, dan wordt dus de rechterkant nul. In dat geval wordt de formule:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$$

μ en ν stellen de vier dimensies van ruimte en tijd voor. Dit betekent dat de Einstein veldvergelijking bestaat uit 16 vergelijkingen.

De veldvergelijkingen zijn volledig afhankelijk van de elementen van de metrische tensor $g_{\mu\nu}$ en hun eerste en tweede afgeleiden. Dit komt omdat de veldvergelijkingen alleen maar bestaan uit de Christoffel symbolen en hun eerste afgeleiden. Vervolgens bestaan de Christoffel symbolen weer volledig uit de elementen $g_{\mu\nu}$ van de metrische tensor en hun eerste afgeleiden.

Schwarzschild heeft een formule afgeleid die volledig voldoet aan de Einstein veldvergelijkingen in het vacuüm.

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Waarbij:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$$

Om de elementen van de metrische tensor te vinden gebruiken we de volgende algemene vorm:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2$$

De formule laat zien dat alleen vier van de zestien elementen van de metrische tensor relevant zijn; de overigen zijn nul.

Omdat de Schwarzschild vergelijking maar vier metrische tensor elementen bevat kunnen we uitrekenen dat van de 16 Einstein veldvergelijkingen er alleen vier relevant zijn: R_{00} , R_{11} , R_{22} and R_{33} .

$R_{\mu\nu}$ wordt de Ricci tensor genoemd en bestaat uit zestien elementen. De algemene vorm van de elementen van de Ricci tensor is:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\rho\mu,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda}$$

Of anders geschreven:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\mu}^{\rho}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda}$$

Deze formule bevat de zogenaamde Christoffel symbolen. De eerste twee aan de rechterkant zijn afgeleiden van de Christoffel symbolen en de derde en de vierde zijn producten van twee Christoffelsymbolen.

De algemene vorm van een Christoffel symbool is, zoals we eerder hebben gezien:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

De Schwarzschild vergelijking geldt voor situaties in het vacuüm en in dat geval geldt dat de rechterkant van de Einstein vergelijking nul is:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

Hier staat R voor de Ricci-scalar en vertegenwoordigt de kromming van de lokale ruimtetijd. De Ricci-scalar is een maat voor de totale kromming van de ruimtetijd op een bepaald punt en wordt berekend als de contractie van de Ricci-tensor:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Dit betekent dat de Ricci-scalar een samenvatting is van hoe de ruimte-tijd in alle richtingen kromt, gebaseerd op de informatie in de Ricci-tensor. In het geval van de veldvergelijkingen van Einstein in vacuüm, is $R=0$, wat betekent dat de totale ruimtetijd kromming nul is buiten een massieve bron.

Wanneer de eerdere formule vermenigvuldigd wordt met $g^{\mu\nu}$ dan krijgen we:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= 0 \\ g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R &= 0 \Rightarrow R - \frac{1}{2} 4R = 0 \end{aligned}$$

Dit kan alleen maar waar zijn als $R=0$ en dus $R_{\mu\nu} = 0$.

Dus ten gevolge van de relatie tussen R en $R_{\mu\nu}$, is het duidelijk dat:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

Kan worden vereenvoudigd tot:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Door de algemene vorm van de Ricci-elementen en de Christoffel-symbolen te analyseren, kon de vereenvoudiging verder worden doorgevoerd. Eerst hebben we een programma ontwikkeld waarmee we via een computer en numerieke toepassing van de vergelijkingen de relevante vorm van de Ricci-elementen hebben gevonden. Ook door theoretische analyse van de Ricci-elementen kon de vereenvoudiging worden afgeleid (zie ook OAS in hoofdstuk Bibliografie [9](#))

Dit resulteerde in de volgende formules met de enige relevante Christoffel-symbolen:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 \\ R_{11} &= -\Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 \\ R_{22} &= \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{23,2}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \\ R_{33} &= +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 \end{aligned}$$

Eerst worden de sferische coördinaten getest. De elementen in de vier bovenstaande formules zijn ingevuld met Christoffel-symbolen die zijn afgeleid en samengevat in de onderstaande tabel (zie [Appendix 1.2](#))

In de literatuur wordt de Christoffel-symboolformule soms weergegeven met het eerste element $-1/2$ en soms $+1/2$.

Vanwege de methode waarmee we onze formules hebben afgeleid, heeft de Christoffel-formule een leidende $+1/2$. Na enkele berekeningen gaf de formule met $+1/2$ het resultaat $R_{11}=R_{22}=R_{33}=R_{44}=0$, wat vereist is volgens de veldvergelijkingen van Einstein in vacuüm. Daarom is de formule in het volgende formaat toegepast:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

Hieronder gaan we controleren, en aantonen, dat de formule van Schwarzschild voldoet aan de algemene formule van Einstein.

5.1 Controle van R_{00} , R_{11} , R_{22} en R_{33} met Sferische Coördinaten van Schwarzschild

Bij het controleren van de Einstein-veldvergelijkingen in vacuüm, moeten we de Ricci-tensorcomponenten R_{00} , R_{11} , R_{22} and R_{33} verifiëren in de context van de Schwarzschild-oplossing. Hierbij maken we gebruik van sferische coördinaten (t, r, θ, ϕ) .

De Schwarzschild-metrick wordt gegeven door:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Om de Ricci-tensorcomponenten R_{00} , R_{11} , R_{22} and R_{33} te controleren, vullen we deze metrick in de veldvergelijkingen van Einstein in en berekenen we de bijbehorende Christoffel-symbolen. Vervolgens berekenen we de Ricci-tensorcomponenten in sferische coördinaten.

Het resultaat van deze berekeningen zou moeten bevestigen dat in vacuüm $R_{00}=R_{11}=R_{22}=R_{33}=0$, zoals vereist door de Einstein-veldvergelijkingen voor een ruimte zonder materie of energie. Dit is een belangrijke validatie van de Schwarzschild-oplossing voor het gravitatieveld rond een massapunt.

De gebruikte stappen omvatten:

1. Afleiden van de Christoffel-symbolen voor de Schwarzschild-metrik in sferische coördinaten.
2. Berekenen van de relevante Ricci-tensorcomponenten door de Christoffel-symbolen in de Ricci-tensorformules te substitueren.
3. Verifiëren dat alle vier de componenten R_{00} , R_{11} , R_{22} and R_{33} gelijk zijn aan nul, wat aantoont dat de Schwarzschild-oplossing voldoet aan de veldvergelijkingen van Einstein in vacuüm.

De Christoffel-symbolen en hun afgeleiden worden gebruikt uit de onderstaande tabel. (Zie [Appendix 1.2](#))

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{00} &= \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 \\ R_{00} &= \frac{R_s(3R_s - 2r)}{2r^4} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \frac{-R_s}{2r^2 \sigma^2} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \frac{1}{r} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \frac{1}{r} - \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \\ R_{00} &= \frac{R_s(3R_s - 2r)}{2r^4} - \frac{R_s^2}{2r^4} + \frac{2R_s(r - R_s)}{2r^4} = \frac{3R_s^2 - 2rR_s - R_s^2 + 2R_s r - 2R_s^2}{2r^4} = 0 \\ \mathbf{R}_{00} &= 0 \quad q.e.d. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{11} &= -\Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 \\ R_{11} &= -\frac{R_s(R_s - 2r)}{2r^4 \sigma^4} - \frac{-1}{r^2} - \frac{-1}{r^2} + \frac{-R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} + \frac{-R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{1}{r} + \frac{-R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{1}{r} - \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} - \frac{1}{r} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{1}{r} \\ R_{11} &= -\frac{R_s(R_s - 2r)}{2r^4 \sigma^4} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{R_s^2}{4r^4 \sigma^4} - \frac{R_s}{2r^3 \sigma^2} - \frac{R_s}{2r^3 \sigma^2} - \frac{R_s^2}{4r^4 \sigma^4} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \\ R_{11} &= -\frac{R_s(R_s - 2r)}{2r^4 \sigma^4} - \frac{R_s^2}{2r^4 \sigma^4} - \frac{2R_s r(1 - \frac{R_s}{r})}{2r^4 \sigma^4} = -\frac{R_s(R_s - 2r)}{2r^4 \sigma^4} - \frac{R_s^2}{2r^4 \sigma^4} - \frac{2R_s r - 2R_s^2}{2r^4 \sigma^4} \\ R_{11} &= \frac{-R_s^2 + 2rR_s}{2r^4 \sigma^4} + \frac{-R_s^2}{2r^4 \sigma^4} + \frac{-2R_s r + 2R_s^2}{2r^4 \sigma^4} = 0 \\ \mathbf{R}_{11} &= 0 \quad q.e.d. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{22} &= \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{23,2}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \\ R_{22} &= -1 + 1 - r\sigma^2 \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} + r\sigma^2 \frac{+R_s}{2r^2 \sigma^2} - r\sigma^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r} r\sigma^2 - 0 = 0 \\ \mathbf{R}_{22} &= 0 \quad q.e.d. \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_{33} = +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2$$

$$R_{33} = -1 + 1 - r\sigma^2 \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} + r\sigma^2 \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} - r\sigma^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r}r\sigma^2 - 0 = 0$$

$$\mathbf{R}_{33} = \mathbf{0} \quad q.e.d.$$

Dus, hiermee is aangetoond dat alle $R_{\mu\nu}$ nul zijn, en bijgevolg dat de Schwarzschild-vergelijking voldoet aan de Einstein-veldvergelijkingen in vacuüm.

Dit bevestigt dat de afgeleide Schwarzschild-oplossing correct is en consistent met de algemene relativiteitstheorie, waar de Einstein-vergelijkingen in vacuüm worden voldaan zonder externe massa of energie. De Schwarzschild-metrick beschrijft daarom nauwkeurig de kromming van ruimte-tijd rond een massapunt in afwezigheid van materie of energie buiten dat punt.

5.2 Controle van R_{00} , R_{11} , R_{22} en R_{33} met t , x , y en z coördinaten volgens Schwarzschild

De Schwarzschild-metrick wordt gegeven door:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt_\infty^2 - \frac{dx_1^2}{r^4 \sigma^2} - \frac{r^2 dx_2^2}{\sin^2 \theta} - r^2 \sin^2 \theta dx_3^2$$

De Christoffel-symbolen en hun afgeleiden worden gebruikt uit de onderstaande tabel. (Zie [Appendix 1.3](#))

$$\mathbf{R}_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1$$

$$R_{00} = \frac{R_s^2}{2r^4} + \frac{R_s \sigma^2}{2} \frac{3R_s - 4r}{2r^4 \sigma^2} + \frac{R_s \sigma^2}{2} \frac{1}{r^3} + \frac{R_s \sigma^2}{2} \frac{1}{r^3} - \frac{R_s}{2r^4 \sigma^2} \frac{R_s \sigma^2}{2}$$

$$R_{00} = \frac{2R_s^2}{4r^4} + \frac{3R_s^2 - 4rR_s}{4r^4} + \frac{4R_s r \sigma^2}{4r^4} - \frac{R_s^2}{4r^4}$$

$$R_{00} = \frac{2R_s^2 + 3R_s^2 - 4rR_s - R_s^2}{4r^4} + \frac{4R_s(r - R_s)}{4r^4} = \frac{2R_s^2 + 3R_s^2 - 4rR_s - R_s^2}{4r^4} + \frac{4R_s r - 4R_s^2}{4r^4}$$

$$R_{00} = \frac{4R_s^2 - 4rR_s}{4r^4} + \frac{4R_s r - 4R_s^2}{4r^4} = 0$$

$$\mathbf{R}_{00} = \mathbf{0} \quad q.e.d.$$

$$\mathbf{R}_{11} = -\Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

$$R_{11} = -\frac{R_s(3R_s - 4r)}{2r^8\sigma^4} - \frac{-3}{r^6} - \frac{-3}{r^6} + \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} + \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} \frac{1}{r^3} + \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} \frac{1}{r^3} - \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} - \frac{1}{r^3} \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^3} \frac{1}{r^3}$$

$$R_{11} = -\frac{2R_s(3R_s - 4r)}{4r^8\sigma^4} + \frac{4}{r^6} + \frac{R_s(3R_s - 4r)}{4r^8\sigma^4} + \frac{4(3R_s - 4r)r(1 - \frac{R_s}{r})}{4r^8\sigma^4} - \frac{R_s^2}{4r^8\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-6R_s^2 + 8rR_s + 3R_s^2 - 4rR_s + 12R_sr - 16r^2 - 12R_s^2 + 16rR_s - R_s^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{4}{r^6}$$

$$R_{11} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{4}{r^6} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{16r^2(1 - \frac{R_s}{r})^2}{4r^8\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{4}{r^6} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{16r^2(1 - 2\frac{R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2})}{4r^8\sigma^4} =$$

$$R_{11} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{4}{r^6} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{16r^2 - 32rR_s + 16R_s^2}{4r^8\sigma^4} = 0$$

$$\mathbf{R}_{11} = \mathbf{0} \quad q.e.d.$$

$$\mathbf{R}_{22} = \mathbf{\Gamma}_{22,1}^1 - \mathbf{\Gamma}_{23,2}^3 + \mathbf{\Gamma}_{22}^1 \mathbf{\Gamma}_{10}^0 + \mathbf{\Gamma}_{22}^1 \mathbf{\Gamma}_{11}^1 + \mathbf{\Gamma}_{22}^1 \mathbf{\Gamma}_{13}^3 - \mathbf{\Gamma}_{21}^2 \mathbf{\Gamma}_{22}^1 - \mathbf{\Gamma}_{23}^3 \mathbf{\Gamma}_{32}^3$$

$$R_{22} = -3 + \frac{2R_s}{r} + 1 - r^3\sigma^2 \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} - r^3\sigma^2 \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} - r^3\sigma^2 \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} r^3\sigma^2 - 0$$

$$R_{22} = -3 + \frac{2R_s}{r} + 1 - \frac{R_s}{2r} - \frac{3R_s - 4r}{2r} - r^3\sigma^2 \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} r^3\sigma^2 - 0$$

$$R_{22} = \frac{-4r}{2r} + \frac{4R_s}{2r} - \frac{R_s}{2r} - \frac{3R_s - 4r}{2r} = 0$$

$$\mathbf{R}_{22} = \mathbf{0} \quad q.e.d.$$

$$R_{33} = +\mathbf{\Gamma}_{33,1}^1 + \mathbf{\Gamma}_{33,2}^2 + \mathbf{\Gamma}_{33}^1 \mathbf{\Gamma}_{10}^0 + \mathbf{\Gamma}_{33}^1 \mathbf{\Gamma}_{11}^1 + \mathbf{\Gamma}_{33}^1 \mathbf{\Gamma}_{12}^2 - \mathbf{\Gamma}_{31}^3 \mathbf{\Gamma}_{33}^1 - \mathbf{\Gamma}_{32}^3 \mathbf{\Gamma}_{33}^2$$

$$R_{33} = -3 + \frac{2R_s}{r} + 1 - r^3\sigma^2 \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} - r^3\sigma^2 \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} - r^3\sigma^2 \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} r^3\sigma^2 - 0$$

$$R_{33} = -3 + \frac{2R_s}{r} + 1 - \frac{R_s}{2r} - \frac{3R_s - 4r}{2r} - r^3\sigma^2 \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} r^3\sigma^2 - 0$$

$$R_{33} = \frac{-4r}{2r} + \frac{4R_s}{2r} - \frac{R_s}{2r} - \frac{3R_s - 4r}{2r} = 0$$

$$\mathbf{R}_{33} = \mathbf{0} \quad q.e.d.$$

6 Controle of de Schwarzschild-elementen voldoen aan de Einstein-veldvergelijkingen volgens de gelimiteerde formule

In dit hoofdstuk zullen we de Schwarzschild-oplossing controleren met de gelimiteerde oorspronkelijke Einstein-formule, die alleen geldig is wanneer de spoor ("trace") van de metrische tensor $t(g_{\mu\nu}) = -1$ is:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}$$

Hier gebruiken we het Christoffel-symbool met een negatief teken zoals Schwarzschild toepaste in zijn afleiding:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = -\frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

In dat geval zullen ook de formules van de Christoffel-symbolen en hun afgeleiden, zoals weergegeven in de onderstaande tabel, van teken veranderen.

In de afleiding van zijn oplossing gebruikte Schwarzschild de t-, x-, y-, z-coördinaten, dus laten we eerst met deze coördinaten beginnen. We hebben eerst de relevante Ricci-elementen afgeleid:

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0$$

$$R_{11} = \Gamma_{11,1}^1 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 + \Gamma_{22,2}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3$$

$$R_{33} = +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2$$

Eerst:

6.1 t,x,y,z (aangepaste polaire) Coördinaten

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0$$

$$R_{00} = \frac{-R_s^2}{2r^4} + \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} \frac{R_s\sigma^2}{2} + \frac{R_s\sigma^2}{2} \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} = \frac{-R_s^2}{2r^4} + \frac{R_s^2}{2r^4} = 0$$

$$R_{00} = 0 \text{ q.e.d.}$$

$$R_{11} = \Gamma_{11,1}^1 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

$$R_{11} = \frac{-6}{r^6\sigma^4} + \frac{10R_s}{r^7\sigma^4} - \frac{4.5R_s^2}{r^8\sigma^4} + \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} + \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} + \frac{1}{r^3} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \frac{1}{r^3}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{-6}{r^6 \sigma^4} + \frac{10R_s}{r^7 \sigma^4} - \frac{4.5R_s^2}{r^8 \sigma^4} + \frac{R_s^2}{4r^8 \sigma^4} + \frac{9R_s^2 + 16r^2 - 24rR_s}{4r^8 \sigma^4} + \frac{2}{r^6} \\
R_{11} &= \frac{-24r^2}{4r^8 \sigma^4} + \frac{40rR_s}{4r^8 \sigma^4} - \frac{18R_s^2}{4r^8 \sigma^4} + \frac{R_s^2}{4r^8 \sigma^4} + \frac{9R_s^2 + 16r^2 - 24rR_s}{4r^8 \sigma^4} + \frac{2}{r^6} \\
R_{11} &= \frac{-8R_s^2 - 8r^2 + 16rR_s}{4r^8 \sigma^4} + \frac{2}{r^6} \\
R_{11} &= \frac{-8R_s^2 - 8r^2 + 16rR_s}{4r^8 \sigma^4} + \frac{8r^2 \sigma^4}{4r^8 \sigma^4} \\
R_{11} &= \frac{-8R_s^2 - 8r^2 + 16rR_s}{4r^8 \sigma^4} + \frac{8r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^2}{4r^8 \sigma^4} \\
R_{11} &= \frac{-8R_s^2 - 8r^2 + 16rR_s}{4r^8 \sigma^4} + \frac{8(r^2 + R_s^2 - 2rR_s)}{4r^8 \sigma^4} = 0
\end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_{11} = \mathbf{0} \quad \text{q.e.d.}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \Gamma_{22,1}^1 + \Gamma_{22,2}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3 \\
R_{22} &= \frac{-2R_s + 3r}{r \sin^2 \theta} + \frac{-1 - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{-r^3 \sigma^2}{\sin^2 \theta} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \frac{-r^3 \sigma^2}{\sin^2 \theta} + \frac{-\cos(\theta) - \cos(\theta)}{\sin^2(\theta) \sin^2(\theta)} + \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} \\
R_{22} &= \frac{-2R_s + 3r}{r \sin^2 \theta} + \frac{-1 - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{-2r^3 \sigma^2}{r^3 \sin^2 \theta} + \frac{2\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} \\
R_{22} &= \frac{-2R_s + 3r}{r \sin^2 \theta} + \frac{-1 - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{-2(r - R_s)}{r \sin^2 \theta} + \frac{2\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} \\
R_{22} &= \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{-1 - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{2\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} \\
R_{22} &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{2\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = 0
\end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_{22} = \mathbf{0} \quad \text{q.e.d.}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 \\
R_{33} &= \left(3 - \frac{2R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - 1 - r^3 \sigma^2 \sin^2 \theta \frac{1}{r^3} + (-\sin^2 \theta \cos \theta) \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} \\
&\quad - \frac{1}{r^3} r^3 \sigma^2 \sin^2 \theta + \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} (-\sin^2 \theta \cos \theta) \\
R_{33} &= \left(3 - \frac{2R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - 1 - 2\sigma^2 \sin^2 \theta - 2\sin^2(\theta) \cos \theta \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} \\
R_{33} &= \left(3 - \frac{2R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - 1 - 2\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta - 2\cos^2 \theta
\end{aligned}$$

$$R_{33} = \left(3 - \frac{2R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - 1 + \left(-2 + \frac{2R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - 1 - 2 \cos^2 \theta$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta = 0$$

$$\mathbf{R}_{33} = \mathbf{0} \quad \mathbf{q.e.d.}$$

6.2 Sferische Coördinaten

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0$$

$$R_{00} = \frac{-R_s(3R_s - 2r)}{2r^4} + \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \frac{R_s}{2r^2\sigma^2}$$

$$R_{00} = \frac{-R_s(3R_s - 2r)}{2r^4} + \frac{R_s^2}{2r^4} =$$

$$R_{00} = \frac{-R_s(2R_s - 2r)}{2r^4} = \frac{-R_s(R_s - r)}{r^4}$$

$$\mathbf{R}_{00} \neq \mathbf{0} \quad ??$$

$$R_{11} = \Gamma_{11,1}^1 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

$$R_{11} = \frac{-R_s(2r - R_s)}{2r^4\sigma^4} + \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} + \frac{-R_s}{2r^2\sigma^2} \frac{-R_s}{2r^2\sigma^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{1}{r}$$

$$R_{11} = \frac{-R_s(2r - R_s)}{2r^4\sigma^4} + \frac{R_s^2}{2r^4\sigma^4} + \frac{2}{r^2}$$

$$R_{11} = \frac{-R_s(2r - R_s)}{2r^4\sigma^4} + \frac{R_s^2}{2r^4\sigma^4} + \frac{4(r^2 + R_s^2 - 2rR_s)}{2r^4\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-2rR_s + R_s^2}{2r^4\sigma^4} + \frac{R_s^2}{2r^4\sigma^4} + \frac{4(r^2 + R_s^2 - 2rR_s)}{2r^4\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-2rR_s + 2R_s^2}{2r^4\sigma^4} + \frac{4(r^2 + R_s^2 - 2rR_s)}{2r^4\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-2rR_s + 2R_s^2 + 4r^2 + 4R_s^2 - 8rR_s}{2r^4\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-10rR_s + 6R_s^2 + 4r^2}{2r^4\sigma^4} = \frac{3R_s^2 + 2r^2 - 5rR_s}{r^4\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-10rR_s + 6R_s^2 + 4r^2}{2r^4\sigma^4} = \frac{3R_s^2 + 2r^2 - 5rR_s}{r^2(R_s^2 + r^2 - 2rR_s)}$$

$$\mathbf{R}_{11} \neq \mathbf{0} \quad ??$$

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 + \Gamma_{22,2}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3$$

$$R_{22} = 1 + 0 + (-r\sigma^2) \frac{1}{r} + \frac{1}{r} (-r\sigma^2) + 0 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$R_{22} = 1 - 2\sigma^2 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - 2\sigma^2$$

$$R_{22} = \frac{1}{\sin^2 \theta} - 2\sigma^2$$

$$\mathbf{R}_{22} \neq \mathbf{0} \quad ??$$

$$R_{33} = +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2$$

$$R_{33} = 1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - r\sigma^2 \sin^2 \theta \frac{1}{r} - \cos \theta \sin \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{r} (-r\sigma^2 \sin^2 \theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (-\cos \theta \sin \theta)$$

$$R_{33} = 1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2\sigma^2 \sin^2 \theta - 2\cos \theta \sin \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$R_{33} = 1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2\sigma^2 \sin^2 \theta - 2\cos^2 \theta$$

$$R_{33} = 1 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2\sigma^2 \sin^2 \theta$$

$$R_{33} = -2\sigma^2 \sin^2 \theta$$

$$\mathbf{R}_{33} \neq \mathbf{0} \quad ??$$

Dus, de Schwarzschild-formule met sferische/polaire coördinaten voldoet niet aan de beperkte formule van Einstein. Dit is niet verrassend, aangezien de determinant van g voor de sferische coördinaten niet -1 is, wat een vereiste is om de beperkte formule te gebruiken.

Echter, voor wat betreft de volledige formule voor de Einstein-veldvergelijkingen, is de sferische/polaire coördinaatvergelijking van Schwarzschild in overeenstemming, zoals hierboven werd aangetoond.

Opmerking:

De beperkte formule was het resultaat van de extra voorwaarde die Einstein toevoegde, namelijk dat het product van de elementen van het spoor van de metrische tensor $g = -1$ moet zijn ($g = g_{00} \cdot g_{11} \cdot g_{22} \cdot g_{33} = -1$). Deze extra voorwaarde werd door Einstein ingevoerd om de berekeningen eenvoudiger te maken en zijn algemene formule te vereenvoudigen. Echter, de beperkte formule is naar mijn mening een beperking die een aantal mogelijke oplossingen negeert. Daarom is het toepassen van de algemene formule naar mijn mening de beste benadering. Dit wordt ook ondersteund door het feit dat de praktische Schwarzschild-vergelijking:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

een g heeft die ongelijk is aan -1 en dus niet voldoet aan de beperkte Einstein-formule, maar wel aan de algemene formule. Met deze formule kunnen allerlei praktische problemen in de Algemene Relativiteitstheorie,

zoals de buiging van licht, de baan van Mercurius, enzovoort, worden opgelost. Ook is inmiddels door diverse metingen aangetoond dat de berekeningen overeenstemmen met de meetresultaten. Kortom de oplossing van Schwarzschild toont aan dat de algemene formule van de Algemene Relativiteitstheorie de voorkeur heeft boven de beperkte formule.

7 Antwoorden op Vragen

7.1 Afleiding van de Schwarzschild-formule naar Tau (eigen tijd)

Vraag: Wat ik moeilijk te accepteren vind in de Algemene Relativiteitstheorie is de afleiding naar "ds". Het lijnelement is niets anders dan de lichtsnelheid, vermenigvuldigd met het lokaal gemeten tijdsverschil "dt₀" (ds = c · dt₀). Ik kan nog steeds dt/ds (verschil in kloktijden) begrijpen, maar wat betekent dx/ds?

Antwoord:

We moeten ons realiseren dat $ds = c d\tau$ is en niet t_0 . τ is de tijd die wordt gemeten op een klok die met de snelheid van zijn eigen frame beweegt. Dus de klok is in rust in zijn eigen frame. De tijd van de bewegende klok ten opzichte van een universeel frame is dt en is een hypothetische tijd in de oorsprong van het beschouwde universele frame, bijvoorbeeld het middelpunt van de aarde. Dus dt kan niet gemeten worden, maar alleen worden afgeleid van $d\tau$, via de hieronder vermelde relatie:

$$d\tau = \frac{\sigma}{\gamma} dt$$

De Schwarzschild-formule kan als volgt worden opgesplitst in partiële afgeleiden:

Neem de componenten van de metrische tensor als algemene componenten A, B, D en E.

$$c^2 d\tau^2 = A c^2 dt^2 - B dx^2 - D dy^2 - E dz^2$$

Deel door $c^2 d\tau^2$:

$$1 = A \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{B}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{D}{c^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{E}{c^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

Vervolgens worden x, y en z gedeeld in hun eigen frame (hier het universele frame) en blijken snelheden te zijn in dat frame.

$$1 = A \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{B}{Ac^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{D}{Ac^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{E}{Ac^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\}$$
$$v^2 = \frac{B}{A} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{D}{A} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{E}{A} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$$

Vul nu v in, in vorige vergelijking:

$$1 = A \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right\} = \frac{A}{\gamma^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{\gamma^2}{A}$$

Of:

$$d\tau^2 = \frac{A}{\gamma^2} dt^2 = \frac{\sigma^2}{\gamma^2} dt^2$$

$$d\tau = \frac{\sigma}{\gamma} dt$$

Dit is de relatie tussen de tijd van de meetklok en de tijd op de oorsprong van het universele frame.

Waar:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{en} \quad R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

7.2 Toelichting op de Transformatieformule van Einstein

De formule staat voor de transformatie tussen twee coördinatenstelsels. Het oude stelsel wordt aangeduid met x_β , dus met coördinaatassen x_0, x_1, x_2, x_3 . Het nieuwe stelsel x'_α , met x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 . De relatie tussen deze twee stelsels wordt aangeduid door de volgende formule (met covariante componenten):

$$dx'_\alpha = \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha} dx_\beta$$

Deze formule is geschreven volgens de Einstein-notatie, wat betekent dat er een sommatie over β is.

Dit betekent dus eigenlijk:

$$dx'_\alpha = \frac{\partial x_0}{\partial x'_\alpha} dx_0 + \frac{\partial x_1}{\partial x'_\alpha} dx_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_\alpha} dx_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_\alpha} dx_3$$

Elke nieuwe coördinaat wordt uitgedrukt in alle oude coördinaten.

In total krijgen we dan:

$$dx'_0 = \frac{\partial x_0}{\partial x'_0} dx_0 + \frac{\partial x_1}{\partial x'_0} dx_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_0} dx_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_0} dx_3$$

$$dx'_1 = \frac{\partial x_0}{\partial x'_1} dx_0 + \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} dx_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} dx_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_1} dx_3$$

$$dx'_2 = \frac{\partial x_0}{\partial x'_2} dx_0 + \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} dx_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} dx_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_2} dx_3$$

$$dx'_3 = \frac{\partial x_0}{\partial x'_3} dx_0 + \frac{\partial x_1}{\partial x'_3} dx_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_3} dx_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_3} dx_3$$

Dit kan ook worden weergegeven als een tensor (tensornotatie):

$$\begin{pmatrix} dx'_0 \\ dx'_1 \\ dx'_2 \\ dx'_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial x'_0} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_0} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_0} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_0} \\ \frac{\partial x_0}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_1} \\ \frac{\partial x_0}{\partial x'_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial x_0}{\partial x'_3} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_3} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_3} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

Het is dus alleen een transformatie van het ene coördinatenstelsel naar het andere. Je zou dit bijvoorbeeld kunnen gebruiken om van Schwarzschild t, r, θ, ϕ naar Schwarzschild t, x, y, z over te gaan.

7.3 Antwoord op vragen betreffende Schwarzschild

Vraag 1: *Waar komt de Algemene Relativiteitsformule na 1916 vandaan, degene met de Ricci-tensor?*

In verschillende literatuur wordt $G_{\mu\nu}$ de Einstein-tensor genoemd, omdat Einstein dingen graag zo eenvoudig mogelijk hield maar in werkelijkheid bedoelde hij met $G_{\mu\nu}$ niets anders dan:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

In deze formule was de Ricci-tensor altijd aanwezig. De Ricci-scalar R is gerelateerd aan $R_{\mu\nu}$ volgens:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}$$

Door $G_{\mu\nu}$ te vermenigvuldigen met $g^{\mu\nu}$, krijgen we:

$$g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = R - \frac{1}{2} 4R = -R$$

De volledige Einstein-formule is:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Hierbij is $R_{\mu\nu}$ de Ricci tensor, $g_{\mu\nu}$ de metrische tensor, G de gravitatieconstante en $T_{\mu\nu}$ de energie-impuls-tensor.

Als we ons buiten een bol bevinden, is er geen massa en energie van materie, en in dat geval is de massa-energie-impulstensor $T_{\mu\nu} = 0$ en dus:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

We weten dat:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} 4 R_{\mu\nu} = -R_{\mu\nu}$$

Dus:

$$G_{\mu\nu} = 0 \text{ alleen als } R_{\mu\nu} = 0 \text{ en dus } R = 0$$

Einstein probeerde de kromming van ruimtetijd te beschrijven en gebruikte het werk van Riemann, die dit voor gekromde oppervlakken had gedaan. De Riemann-tensor, bijvoorbeeld, is: $R_{\mu\beta\rho\nu}$. Dit is een tensor van rang vier en moeilijk voor te stellen. Omdat de massa-energie-impulstensor $T_{\mu\nu}$ twee indices heeft, moet de Riemann-tensor worden omgezet van vier naar twee indices.

Met behulp van de metrische tensor kan de covariante Riemann-tensor worden omgezet in een gedeeltelijk contravariante vorm:

$$R^{\beta}_{\mu\rho\nu} = g^{\beta\rho} R_{\mu\beta\rho\nu}$$

Dit is nodig om de gewenste contractie uit te voeren. Door $\beta = \rho$ te stellen, kan de contractie worden uitgevoerd met als resultaat de Ricci-tensor $R_{\mu\nu}$.

$$R^{\beta}_{\mu\beta\nu} = R_{\mu\nu}$$

Dus hier is de Ricci-tensor het spoor van de Riemann-tensor, en veel elementen van de Riemann-tensor zijn overbodig. Deze stap is niet erg duidelijk, het feit dat deze elementen zonder gevolgen kunnen worden genegeerd. De relatie met Riemann is nog steeds te zien in de Ricci-tensor en de Christoffelsymbolen:

De Ricci-tensor wordt nu als volgt weergegeven:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^{\rho}_{\rho\mu,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}$$

Het Christoffel-symbool is:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

De afgeleide van Christoffel-symbool wordt dan:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\gamma} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x^{\gamma}} = -g^{\rho\alpha} \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \cdot \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} \right\}$$

Wanneer ik, met behulp van mijn programma, bereken of de Ricci-elementen $R_{00}, R_{11}, R_{22}, R_{33}$ a nul zijn, dan klopt het resultaat theoretisch, maar met de beperkte formule van de veldvergelijkingen ($g=-1$) is het resultaat niet correct. Ik ben ervan overtuigd dat het correct zal zijn, omdat Schwarzschild zijn vergelijking baseerde op Einstein's algemene veldvergelijkingen.

Verder onderzocht:

Schwarzschild gebruikt de welbekende polaire vergelijking. De determinant van de metrische tensor (hier het product van de coëfficiënten) is niet -1. Deze polaire vergelijking voldoet aan de Einstein-veldvergelijkingen, maar niet aan de beperkte versie van deze vergelijkingen, omdat bij de laatste $g=-1$ is vereist. Schwarzschild heeft een transformatie afgeleid, gebaseerd op aangepaste polaire coördinaten, waarbij hij de transformatie zodanig heeft gekozen dat $g=-1$ wordt gehaald. In dat geval voldoet de vergelijking ook aan de beperkte Einstein-veldvergelijkingen. Hoewel Schwarzschild probeerde te voldoen aan Einstein's wens om de metrische spoor $g=-1$ te hebben, is mijns inziens de enige relevante kwestie dat de Einstein-veldvergelijkingen, waarbij $T_{\mu\nu} = 0$, en dus $R_{00} = R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0$, worden nageleefd, ongeacht of $g = -1$ of $g \neq -1$. Dus, de eis van $g = -1$ is een onnodige beperking.

Vraag 2: De consequentie van het verschil in formules is groot. In jouw document tel ik negen Christoffelsymbolen, terwijl Karl Schwarzschild er tien vond. Bij jou lijkt de 222 afwezig te zijn. Dit komt omdat jouw definitie van de metrische tensor g verschilt van die van Schwarzschild; g_{22} en g_{33} zijn -1 voor Schwarzschild, terwijl jij de coördinaat r toevoegt (bijvoorbeeld $g_{22} = -r^2$). Ook Droste (1917), Eddington (1921), MWT (1975) en OAS (2007) hielden zich aan $g=-1$ voor de Schwarzschild-oplossing, zodat: $g_{22} = g_{33} = -1$. Dit roept de vraag bij mij op: denk je dat $g=-1$ vereist is voor de Schwarzschild-oplossing?

In eerste instantie heeft Schwarzschild zijn vergelijking afgeleid van het Cartesiaanse assenstelsel x, y, z . In dat geval is het resultaat een metrische tensor met de volgende termen:

$$g_{00} = \sigma^2 \quad g_{11} = -\frac{1}{r^4 \sigma^2} \quad g_{22} = -\frac{r^2}{\sin^2 \theta} \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

In dat geval worden 10 (14) relevante Christoffelsymbolen gecreëerd. Ook zie je in mijn overzicht van formules dat ik formules heb afgeleid voor zowel de bolvormige als de x, y, z vorm. In de x, y, z vorm bestaat 222. inderdaad.

Voor de bolvormige vorm is dit echter anders; daar zijn de elementen van de metrische tensor:

$$g_{00} = \sigma^2 \quad g_{11} = \frac{-1}{\sigma^2} \quad g_{22} = -r^2 \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

Dit geldt ook voor Schwarzschild! De elementen g_{22} en g_{33} kunnen niet -1 zijn omdat in dat geval

$\frac{\partial g_{22}}{\partial r}, \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta}, \frac{\partial g_{33}}{\partial r}, \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta}$ nul zouden zijn en het aantal Christoffelsymbolen beperkt zou zijn tot 001 (en 010), 100 en 111.

In het geval van bolcoördinaten is 222 inderdaad nul omdat g_{22} onafhankelijk is van θ en de afgeleide dus nul is:

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right\} = 0$$

Opmerking:

Als wordt gesteld dat $\theta = 90^0$, moet dit aan het einde van de berekeningen worden gedaan.

Bijvoorbeeld:

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\} = -\cos \theta \sin \theta = 0 \text{ wanneer } \theta = 90^0$$

Maar voor het Ricci-element is ook de afgeleide van dit Christoffelsymbool nodig en dat is:

$$\frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial \theta} = -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{ wanneer } \theta = 90^0$$

En niet nul! En dat geldt ook voor sommige andere termen.

Waarom Einstein de beperking van $\det(g)=-1$ heeft geïntroduceerd, weet ik niet, behalve dat de berekeningen in het algemeen eenvoudiger en symmetrischer worden. Maar naar mijn mening leidt dit tot een onnodige beperking. Het hangt ook af van welk type coördinatenstelsel wordt gekozen. Bijvoorbeeld, het element van de metrische tensor van t, x, y, z levert inderdaad een $\det(g)$ van -1 op:

$$\sigma^2 \cdot \left(-\frac{1}{r^4 \sigma^2} \right) \cdot \left(-\frac{r^2}{\sin^2 \theta} \right) \cdot (-r^2 \sin^2 \theta) = -1$$

Maar met bolcoördinaten is het:

$$\sigma^2 \cdot \frac{-1}{\sigma^2} \cdot (-r^2) \cdot (-r^2 \sin^2 \theta) = -r^4 \sin^2 \theta$$

En dus $\det(g) \neq -1$.

Vraag 3: De veldvergelijkingen in jouw document op pagina 2 en 3, gebaseerd op de Ricci-tensor, verschillen sterk van die welke wij (en Karl Schwarzschild) in bijlage E, op basis van de G-tensor, hebben gebruikt. Je hebt de G-tensor ook genoemd in jouw document op pagina 9. Mijn vraag is: zouden de resultaten niet hetzelfde moeten zijn?

Ik heb de formule voor de G-tensor ook opgenomen in mijn overzicht van formules om deze bij de hand te hebben en voor vergelijkingsdoeleinden, maar ik heb deze nog niet theoretisch gecontroleerd. In mijn berekeningen met mijn programma in Excel heb ik ook de G-formule gebruikt, maar die leverde nooit $R_{00} = 0$ en dergelijke op. Ik moet het nog verder uitproberen. Zoals ik eerder zei, moet het kloppen en het zal zeker correct zijn, want anders zou Schwarzschild nooit tot deze configuratie zijn gekomen.

Vraag 4: Ik heb nog steeds enige moeite met het begrijpen van de Schwarzschild-vergelijking en de veldvergelijkingen van Einstein. Kun je hier wat dieper op ingaan?

Ik vrees dat we verstrikt raken in dezelfde discussie als de vorige keer. Ik probeer niet de Schwarzschild/Einstein-oplossing te verdedigen en jouw benadering van de voorgestelde wijziging van de Schwarzschild-vergelijking te

bekritiseren. Ik probeer gewoon alles te begrijpen en als ik Schwarzschild niet volledig begrijp, blijf ik zoeken naar het juiste antwoord voordat ik begin met het aanpassen van zijn oplossing. Ik pas het alleen aan als ik een mogelijke fout in zijn vergelijking zie en begrijp.

Laten we dus eerst de Schwarzschild-vergelijking grondig onderzoeken voordat we ons in Einstein verdiepen. Ik beweer niet alles te weten, maar hier zal ik uitleggen hoe ik het tot nu toe begrijp.

Einstein trachtte een coördinatensysteem te vinden waarin geen gravitationele krachten voelbaar waren. In plaats van een Cartesiaans coördinatensysteem, waar er gravitationele krachten zijn door massa en bijgevolg de versnelling van een deeltje, wilde Einstein een gekromd coördinatenstelsel zodat het deeltje een pad volgt alsof er geen kracht aanwezig was. En als er geen kracht is, volgt het deeltje een vrijwillig pad, een geodetische lijn, of misschien kun je dit een “rechte” lijn noemen in dit nieuwe systeem. Volgens Newton, als iets momentum heeft, blijft het bewegen langs een rechte lijn. Ook in Einstein's gekromde systeem, waar er geen kracht is maar wel momentum, volgt het deeltje een geodetische lijn en die moet, in dat systeem, een “rechte” lijn zijn.

Einstein heeft geprobeerd een vergelijking te vinden voor elk willekeurig coördinatensysteem. Hij vond voor een ruimtetijd buiten een massa de volgende formule:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

Deze formule is onafhankelijk van het gekozen coördinatensysteem. De term $R_{\mu\nu}$ is bijvoorbeeld onafhankelijk van het gekozen systeem, maar is opgebouwd uit de kwadraten van de coördinaten (vermenigvuldigd met de coëfficiënten). Deze coördinaten en hun coëfficiënten veranderen echter afhankelijk van het gekozen systeem, hoewel de totale $R_{\mu\nu}$ hetzelfde blijft.

In het algemeen zou men elk systeem kunnen kiezen zolang de coördinaten samen met hun bijbehorende coëfficiënten tot hetzelfde resultaat leiden.

Het is vergelijkbaar met een lijnsegment dat kan worden berekend met behulp van de stelling van Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$. Hier is c constant en men kan a and b zoveel veranderen als men wilt, zolang de som van de kwadraten maar hetzelfde blijft.

Coördinatensystemen kunnen ook worden gebruikt waarbij de coördinaten niet rechthoekig zijn maar een hoek ϕ met elkaar vormen; dit moet echter worden uitgedrukt in de coëfficiënten van dat systeem. Als voorbeeld kunnen we de cosinusregel gebruiken $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi$, waarbij we een kruisproduct ab krijgen. Hier zijn de coördinaten geen kromme lijnen maar rechte lijnen, hoewel ze niet onderling rechthoekig zijn.

Einstein beschouwt nu de gekromde ruimtetijd als opgebouwd uit infinitesimaal kleine lineaire lijnsegmenten die samen een lijn of coördinatensysteem vormen. Hij ziet elke infinitesimale locatie in ruimtetijd als bestaande uit een rechthoekig coördinatensysteem of in ieder geval een lineair systeem. Deze relatie van coördinaten en coëfficiënten verandert echter bij elke verschuiving van locatie, afhankelijk van de kromming op die nieuwe locatie.

Doordat Einstein zocht naar een oplossing voor elk mogelijk gekromd en niet-rechthoekig coördinatensysteem, ontstaat er niet alleen een relatie van het lijnsegment met de coördinaten maar ook met alle mogelijke

kruisproducten van de coördinaten. Hoewel het coördinatensysteem beperkt is tot één locatie, omvat de relatie tussen lijnsegment en coördinatensysteem alle informatie over de ruimtetijd. Deze informatie is vervat in de zogenaamde metriek, die de coëfficiënten zijn die aan elke coördinaat en de mogelijke kruisproducten van deze coördinaten zijn gehecht.

Door op deze infinitesimale manier te werken, wordt de totale gekromde lijn opgesplitst in kleine lineaire segmenten, waardoor lokaal een lineaire relatie ontstaat.

Schwarzschild probeerde een praktischere oplossing te vinden en besloot dat het lokale coördinatensysteem alleen uit onderling rechthoekige coördinaten zou bestaan. Op deze manier verdwenen de kruisproducten. Vervolgens kwam hij tot de volgende polaire vergelijking voor een lijnsegment in vacuüm:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

We zien hier een klein lijnsegment ds dat een relatie heeft met de vier coördinaten (t, r, θ, ϕ) . De mate van afhankelijkheid van het lijnsegment met de coördinaten wordt bepaald door de coëfficiënten. Als we hier het effect van de zon (M) op de ruimtetijd beschouwen, kan er worden gezien dat de coëfficiënten afhankelijk zijn van de locatie door middel van r en θ . Het kleine lijnsegment op elke locatie wordt bepaald door de coördinaten; en het gewicht van deze bepaling is verschillend voor elke locatie, maar de totale som leidt altijd tot hetzelfde kleine lijnsegment. Interessant is om te zien dat de coëfficiënten in deze formule onafhankelijk zijn van t en ϕ .

Door een integraal over het lijnsegment te nemen, krijgen we een som van al die infinitesimale kleine lijnsegmenten die het totale pad afbeelden.

7.4 Gedetailleerde afleiding van de Einstein-vergelijking (57) vanuit vergelijking (53)

Vraag:

Ik ben Einstein's originele GR-paper aan het lezen. Ik heb het als PDF bij deze e-mail bijgevoegd. (Einstein, Relativity: The Special and General Theory, 1916 (this revised edition: 1924)) (Einstein, The Collected Papers of Albert Einstein, 1997)

In sectie 18, onderaan pagina 186 van het artikel (onderaan links op pagina 22 van de PDF), staat een vergelijking die ik probeer af te leiden met de methode die Einstein voorstelt in het artikel (vermenigvuldiging van vergelijking 53 met de afgeleide van de metrische tensor en gebruikmakend van de methoden in sectie 15). Zou je deze vergelijking op de specifieke manier die Einstein aangeeft kunnen afleiden, en uitsluitend gebaseerd op het voorgaande materiaal in Einstein's artikel? Kun je mij de gedetailleerde stappen laten zien die je hebt genomen om tot die vergelijking te komen volgens de methode die Einstein aangeeft?

Antwoord:

Opmerking: de vergelijkinsnummers verwijzen naar het originele werk van Einstein over Algemene Relativiteit.

Einstein vergelijking (53)

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

$$\sqrt{-g} = 1$$

Vermenigvuldig (53) met $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}$:

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} \right) = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \left(-\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \right) =$$

Dit leidt tot:

$$= -\kappa \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T \right)$$

Gebruik vergelijking Einstein (29):

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\sigma}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}$$

In het geval $g=-1$ then:

$$-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} = 0$$

Ingevuld:

$$= -\kappa \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T \right) = -\kappa \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu} - 0 \right) = -\kappa \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu}$$

Dus de vergelijking wordt:

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} + \kappa \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu} = 0$$

De volgende stap geeft:

$$\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu} = 0 \quad (1)$$

Vervang dit in:

$$\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (-2\kappa t_{\sigma}^{\alpha}) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu} = 0$$

Kijk voor de uitwerking van het gele gedeelte onder de gestreepte lijn hieronder.

Dit leidt tot:

$$-\frac{\partial t_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu} = 0 \quad (2)$$

Gebruik nu Einstein's vergelijking (56):

$$\frac{\partial(t_{\mu}^{\sigma} + T_{\mu}^{\sigma})}{\partial x^{\sigma}} = 0$$

Dus:

$$\frac{\partial t_{\mu}^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}} = - \frac{\partial T_{\mu}^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}}$$

Vervang σ door α , en μ door σ :

$$\frac{\partial t_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = - \frac{\partial T_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}$$

De vergelijking (2) wordt:

$$\frac{\partial T_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu} = 0 \quad (57)$$

=====

Afleiding van de gele stap:

Om te bewijzen dat:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (-2\kappa t_{\sigma}^{\alpha}) = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}$$

Einstein vergelijking (48):

$$\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = -\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}$$

$$\frac{\partial H}{\partial g_{\sigma}^{\mu\nu}} = \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$$

Einstein vergelijking (47b):

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) = \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}$$

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}$$

Kan herschreven worden als:

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}$$

Nu kunnen we differentiëren:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial(g_\sigma^{\mu\nu})}{\partial x^\alpha} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} - \frac{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}$$

Hier geldt:

$$\frac{\partial(g_\sigma^{\mu\nu})}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} = \frac{\partial(g_\alpha^{\mu\nu})}{\partial x^\sigma}$$

Vul dit in:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial(g_\alpha^{\mu\nu})}{\partial x^\sigma} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}$$

Zoals vermeld in Einstein's document onder vergelijking (47a), wordt H beschouwd als een functie van $g^{\mu\nu}$ en $g_\sigma^{\mu\nu} \left(= \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right)$, dus:

$$\frac{\partial H}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial H}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \frac{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}$$

Vul dit in:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial H}{\partial x^\sigma}$$

Of:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (H) \\ & \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\delta_\sigma^\alpha H) \\ & \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} - \delta_\sigma^\alpha H \right) \end{aligned}$$

Volgens Einstein vergelijking (49):

$$-2\kappa t_\sigma^\alpha = g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} - \delta_\sigma^\alpha H$$

Vul dit in vergelijking (1):

$$\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} T_{\mu\nu} = 0$$

Wordt:

$$\frac{1}{2\kappa} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (-2\kappa t_\sigma^\alpha) \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} T_{\mu\nu} = 0$$

q.e.d.

7.5 Vraag over vergelijking in Einstein's origineel werk (Engelse versie)

Vraag:

*Ik voeg opnieuw het PDF-bestand van Einstein's artikel toe ter referentie. (Einstein, Relativity: The Special and General Theory, 1916 (this revised edition: 1924)) (Einstein, The Collected Papers of Albert Einstein, 1997)
Op de onderste regel van pagina 191 staan drie termen gescheiden door gelijkheidstekens. Ik kan het eerste gelijkheidsteken niet rechtvaardigen, d.w.z. ik zie niet hoe de eerste term gelijk is aan de tweede term. Einstein zegt om vergelijking (60) te gebruiken, maar ik heb daar geen succes mee.
Kun je erachter komen waarom die twee termen gelijk zijn?*

Antwoord:

Eerst controleren we vergelijking (60) in het originele (Duitse) artikel van Einstein.

Op pagina 812 van het originele, Duitse artikel van Einstein staat waarschijnlijk een fout in vergelijking (60):

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial F_{\tau\rho}}{\partial x^\sigma} = 0$$

Dit zou hoogstwaarschijnlijk moeten zijn:

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial F_{\tau\rho}}{\partial x^\sigma} = 0 \quad (60)$$

In de Engelse vertaling (pagina 189) is het al gecorrigeerd.

De laatste vergelijking op pagina 191 (pagina 814 van de originele Duitse versie):

$$F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} = -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \quad (1)$$

Om de geldigheid van het gelijkheidsteken tussen de twee linkse termen te bewijzen, moeten we het volgende doen:

Volgens vergelijking (60):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} &= 0 \\ \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} &= -\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \end{aligned}$$

Samen met (1):

$$F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = F^{\mu\nu} \left(-\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \right) = -F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \\
&= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2} \left(F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \right)
\end{aligned}$$

We wisselen de dummy-indices om in de term aan de rechterkant:

$$= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2} \left(F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + F^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} \right)$$

Door de indices van $F^{\nu\mu}$ om te wisselen en het teken te veranderen:

$$= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2} \left(F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} \right)$$

Door de indices van $\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}$ om te wisselen en het teken te veranderen:

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2} \left(F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} \right) \\
&= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} \right)
\end{aligned}$$

De rechterkant is vergelijking (60) en is nul. Met als resultaat:

$$F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}$$

q.e.d.

7.6 Vraag over Einstein's vergelijking (69)

Vraag:

Verwarring over Einstein's vergelijking (69):

$$k = \frac{8\pi K}{c^2} = 1.87 \cdot 10^{-27} \tag{E69}$$

Antwoord:

Einstein werkte met centimeters en grammen (CGS-eenheden). Tegenwoordig gebruiken we meters en kilogrammen (MKS-eenheden). Hierdoor is er een verschil in de eenheden, en dit moet worden gecorrigeerd. Bovendien is Einstein hier niet consistent, omdat hij $c=1$ heeft gezet, maar in de formule is een c^2 .

Als we dit corrigeren naar de huidige gebruikelijke eenheden, krijgen we:

$$k = \frac{8\pi G}{c^4} \approx 2.07 \cdot 10^{-43}$$

Dus, K en G zijn beide de gravitatieconstante, maar met verschillende eenheden.

Appendix 1 Formules van de Algemene Relativiteitstheorie

Hieronder geven we een samenvatting van een aantal eerder afgeleide Algemene Relativiteitstheorie- en Schwarzschild-formules. Vervolgens leiden we alle formules af die relevant zijn voor berekeningen in verschillende hoofdstukken. In deze appendix passen we de Einstein-notatie toe.

Algemene Relativiteitstheorie (GR) Formules:

Einstein's veldvergelijkingen:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Waarbij:

- $R_{\mu\nu}$ de Ricci-tensor is
- $g_{\mu\nu}$ de metrische tensor
- R de Ricci-scalar
- λ de kosmologische constant
- $T_{\mu\nu}$ de energie-impuls-tensor

Schwarzschild metriek (in sferische coördinaten):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Waarbij:

- ds^2 het ruimtetijdinterval is
- G de gravitatieconstante
- M de massa van het centrale object
- r de radiale coördinaat
- θ en ϕ zijn sferische coördinaten.

De coëfficiënten zijn dus niet afhankelijk van t en ϕ maar alleen van r en θ !

Tijdvertraging voor een bolvormig object (Gravitational Time Dilation):

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}$$

Waarbij:

- $\Delta\tau$ de eigen tijd is voor een waarnemer op een afstand r

- Δt de tijd is voor een verre waarnemer

○

Baan van licht (Null-geodeten):

$$ds^2 = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Krommingsradius van licht om een massa:

De afwijking van lichtstraal bij de aanwezigheid van een zwaartekrachtveld wordt gegeven door:

$$\delta\phi = \frac{4GM}{rc^2}$$

Appendix 1.1 Samenvatting en afleiding van verdere relevante formules:

In deze sectie zullen we de relevante formules voor de specifieke berekeningen in de hoofdstukken afleiden. Dit omvat de afleiding van de metrische tensor, geodetenvergelijkingen, en de energie-impuls-tensor in verschillende configuraties.

$$\begin{aligned}
dx^m &= \frac{\partial x^m}{\partial y^r} dy^r \\
ds^2 &= \eta_{mn} d\xi^m d\xi^n \\
ds^2 &= g_{mn}(x) dx^m dx^n = g_{pq}(y) dy^p dy^q \\
g_{pq}(y) &= g_{mn}(x) \frac{\partial x^m}{\partial y^p} \frac{\partial x^n}{\partial y^q} \\
V'^n(y) &= \frac{\partial y^n}{\partial x^m} V^m(x) \\
W'_p(y) &= \frac{\partial x^q}{\partial y^p} W'_q \\
T_{mn}(x) &= \frac{\partial V^m(x)}{\partial x^n} \\
T_{mn}(y) &= \frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial x^s}{\partial y^n} T_{rs}(x) \\
T^{mn}(y) &= \frac{\partial y^m}{\partial x^r} \frac{\partial y^n}{\partial x^s} T^{rs}(x) \\
T^{rs}(x) &= A_x^r B_x^s \\
E_\mu &= g_{\mu\vartheta} E^\vartheta \\
E^\mu &= g^{\mu\vartheta} E_\vartheta = g^{\mu\vartheta} g_{\vartheta\rho} E^\rho = \delta_\rho^\mu E^\rho = E^\mu
\end{aligned}$$

Lijnsegment in klein gebied geldt: Pythagoras:

$$ds^2 = \delta_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial y^n} dy^n \cdot \frac{\partial x^n}{\partial y^s} dy^s$$

Transformeren naar ander frame:

$$ds^2 = \boxed{\delta_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial y^r} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial y^s}} dy^r dy^s$$

$$\textbf{metric tensor: } g_{mn} = \delta_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial y^r} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial y^s}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Geodetische vergelijking:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0 \quad \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\
T'_{\mu^\vartheta}(y) &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\vartheta} T_{\alpha\beta} \\
T'^{\mu^\vartheta}(y) &= \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\vartheta}{\partial x^\beta} T_{\alpha\beta} \\
T'^{\mu^\vartheta}_\mu(y) &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\vartheta}{\partial x^\beta} T_\alpha^\beta \\
g_{\mu\alpha} g^{\alpha\vartheta} &= \delta_\mu^\vartheta
\end{aligned}$$

Contractie:

$$\begin{aligned}
A^\mu &= g^{\mu\vartheta} A_\vartheta \\
A_\mu &= g_{\mu\vartheta} A^\vartheta \\
\text{so: } A \cdot B &= g_{\mu\vartheta} A^\mu B^\vartheta \equiv A_\vartheta B^\vartheta
\end{aligned}$$

Ricci Tensor:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= R_{\mu\rho\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\rho - \Gamma_{\rho\mu,\nu}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \\
G_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\rho - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \text{ only if } g = \det(g_{\mu\nu}) = -1
\end{aligned}$$

Christoffel symbool:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\}$$

Ricci scalar:

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= R_\mu^\mu \\
R &= g^{ab} (\Gamma_{ab,c}^c - \Gamma_{ac,b}^c + \Gamma_{ab}^d \Gamma_{cd}^c - \Gamma_{ac}^d \Gamma_{bd}^c) \\
R &= 2g^{ab} (\Gamma_{a[b,c]}^c + \Gamma_{a[b}^d \Gamma_{c]d}^c)
\end{aligned}$$

Appendix 1.2 Schwarzschild Metriek – Polaire Coördinaten

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

$$\sigma^2 = 1 - \frac{R_s}{r} \text{ hier is: } R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

$$\begin{aligned} g_{00} &= g_{tt} & g_{22} &= g_{\theta\theta} \\ g_{11} &= g_{rr} & g_{33} &= g_{\phi\phi} \end{aligned}$$

Schwarzschild in polaire coördinaten (in vlak $\theta = 90^\circ$)

$$\begin{aligned} g_{00} &= \sigma^2 & g^{00} &= \frac{1}{\sigma^2} \\ g_{11} &= \frac{-1}{\sigma^2} & g^{11} &= -\sigma^2 \\ g_{22} &= -r^2 & g^{22} &= \frac{-1}{r^2} \\ g_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta = -r^2 & g^{33} &= \frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{-1}{r^2} \\ & & \frac{d\sigma}{dr} &= \frac{R_s}{2r^2 \sigma} \end{aligned}$$

Metriek eerste afgeleide voor sferische coördinaten

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} &= \frac{R_s}{r^2} & \frac{\partial g_{11}}{\partial r} &= \frac{R_s}{r^2 \sigma^4} \\ \frac{\partial g_{22}}{\partial r} &= -2r & \frac{\partial g_{33}}{\partial r} &= -2r \sin^2 \theta = -2r \\ \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} &= -2r^2 \cdot \sin(\theta) \cos(\theta) = 0 \end{aligned}$$

Metriek tweede afgeleide voor sferische coördinaten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial r^2} &= \frac{-2R_s}{r^3} & \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial r^2} &= \frac{-2R_s}{r^3 \sigma^6} \\ \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial r^2} &= -2 & \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r^2} &= -2 \sin^2 \theta = -2 \\ \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta \partial r} &= -4r \cdot \sin(\theta) \cos(\theta) = 0 \\ \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta^2} &= 2r^2 \cdot (\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)) = 2r^2 \end{aligned}$$

Schwarzschild polaire coördinaten:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\} \\ \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \left\{ \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} = \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} = \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \right\} = \frac{-R_s}{2r^2 \sigma^2} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\} = -r\sigma^2 \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} = -r\sigma^2 \sin^2 \theta = -r\sigma^2 \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\} = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\} = -\cos \theta \sin \theta = 0 \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 0 \end{aligned}$$

In **r, theta, phi** coördinaten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{01}^0}{\partial r} &= \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial r} = \frac{R_s(R_s - 2r)}{2r^4 \sigma^4} \\ \frac{\partial \Gamma_{00}^1}{\partial r} &= \frac{R_s(3R_s - 2r)}{2r^4} \\ \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial r} &= \frac{R_s(2r - R_s)}{2r^4 \sigma^4} \\ \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial r} &= -1 \\ \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial r} &= -\sin^2 \theta \\ \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial r} &= \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{31}^3}{\partial r} = \frac{-1}{r^2} \\ \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial \theta} &= -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\ \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial \theta} &= \frac{\partial \Gamma_{32}^3}{\partial \theta} = \frac{-1}{\sin^2 \theta} = -1 \end{aligned}$$

Schwarzschild in **r, theta, phi** coördinaten:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\}$$

Eerste afgeleide van het Christoffel symbool:

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\delta}} = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\rho\alpha}}{\partial x^{\delta}} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\} \\ + \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\delta}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\delta}} \right\}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\delta}} = \frac{-1}{2} (g^{\rho\alpha})^2 \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\delta}} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\} \\ + \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\delta}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\delta}} \right\}$$

=====

Appendix 1.3 Schwarzschild Metriek - x,y,z Coördinaten

$$\begin{aligned}x_0 &= t_\infty & dx_0 &= dt_\infty \\x_1 &= \frac{r^3}{3} & dx_1 &= r^2 \cdot dr & \frac{dr}{dx_1} &= \frac{1}{r^2} \\x_2 &= -\cos \theta = 0 & dx_2 &= \sin \theta \cdot d\theta = d\theta & \frac{d\theta}{dx_2} &= \frac{1}{\sin \theta} \\x_3 &= \emptyset & dx_3 &= d\emptyset\end{aligned}$$

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt_\infty^2 - \frac{dx_1^2}{r^4 \sigma^2} - \frac{r^2 dx_2^2}{\sin^2 \theta} - r^2 \sin^2 \theta dx_3^2$$

Aanname op equator niveau $\theta = 90^\circ \Rightarrow \sin \theta = 1$

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt_\infty^2 - \frac{dx_1^2}{r^4 \sigma^2} - r^2 dx_2^2 - r^2 dx_3^2$$

Schwarzschild metriek in x, y, z

$$\begin{aligned}g_{00} &= \sigma^2 & g^{00} &= \frac{1}{\sigma^2} \\g_{11} &= -\frac{1}{r^4 \sigma^2} & g^{11} &= -r^4 \sigma^2 \\g_{22} &= -\frac{r^2}{\sin^2 \theta} & g^{22} &= -\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \\g_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta = -r^2 & g^{33} &= \frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{-1}{r^2}\end{aligned}$$

g's zijn afhankelijk van r (dus x_1) en θ (dus x_2):

$$\frac{dr}{dx_1} = \frac{1}{r^2} \quad \frac{d\sigma}{dx_1} = \frac{R_s}{2r^4 \sigma} \quad \frac{d\theta}{dx_2} = \frac{1}{\sin \theta}$$

Metriek afgeleide voor x, y, z

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_1} &= \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \frac{dr}{dx_1} = 2\sigma \frac{R_s}{2r^4 \sigma} = \frac{R_s}{r^4} \\ \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} &= \frac{4r - 3R_s}{r^8 \sigma^4} \\ \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} &= \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \frac{dr}{dx_1} = r^{-2} \left(\frac{-2r}{\sin^2 \theta} \right) = \frac{-2}{r \sin^2 \theta} = \frac{-2}{r} \\ \frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} &= r^{-2} (-2r \sin^2 \theta) = \frac{-2 \sin^2 \theta}{r} = \frac{-2}{r} \\ \frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} &= \frac{2r^2 \cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} \cdot \frac{1}{\sin \theta} = \frac{2r^2 \cos(\theta)}{\sin^4(\theta)} = 0 \\ \frac{\partial g_{33}}{\partial x_2} &= \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dx_2} = (-2r^2 \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)) \frac{1}{\sin \theta} \\ &= -2 \cdot r^2 \cdot \cos(\theta) = 0\end{aligned}$$

Metriek tweede afgeleide voor x, y, z coördinaten

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x_1^2} &= \frac{-4R_s}{r^7} & \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_1^2} &= \frac{-2(14r^2 + 9R_s^2 - 22rR_s)}{r^{12} \sigma^6} \\ \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_1^2} &= \frac{2}{r^4 \sin^2(\theta)} = \frac{2}{r^4} \\ \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_2^2} &= \frac{-2r^2(1 + 3 \cos^2(\theta))}{\sin^6(\theta)} = -2r^2 \\ \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{4 \cos(\theta)}{r \sin^4(\theta)} = 0 \\ \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x_1^2} &= \frac{2 \sin^2(\theta)}{r^4} = \frac{2}{r^4} \\ \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{-4 \cos(\theta)}{r} = 0 \\ \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x_2^2} &= 2r^2 \cdot \sin \theta \frac{1}{\sin \theta} = 2r^2\end{aligned}$$

Schwarzschild in x, y, z

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\} \\ \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \left\{ \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^2} \frac{R_s}{r^4} = \frac{R_s}{2r^4 \sigma^2} \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} (-r^4 \sigma^2) \frac{-R_s}{r^4} = \frac{R_s \sigma^2}{2} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} (-r^4 \sigma^2) \frac{4r - 3R_s}{r^8 \sigma^4} = \frac{3R_s - 4r}{2r^4 \sigma^2} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} (-r^4 \sigma^2) \frac{2}{r \sin^2 \theta} = \frac{-r^3 \sigma^2}{\sin^2 \theta} \\ &= -r^3 \sigma^2 \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} (-r^4 \sigma^2) \frac{2 \sin^2 \theta}{r} \\ &= -r^3 \sigma^2 \sin^2 \theta = -r^3 \sigma^2 \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) \frac{-2}{r \sin^2 \theta} = \frac{1}{r^3} \\ \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) (2 \cdot r^2 \cdot \cos(\theta)) \\ &= -\sin^2 \theta \cos \theta = 0 \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) \frac{2r^2 \cos(\theta)}{\sin^4(\theta)} \\ &= \frac{-\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \frac{-2 \sin^2 \theta}{r} \\ &= \frac{1}{r^3} \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) (-2 \cdot r^2 \cdot \cos(\theta)) \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} = 0\end{aligned}$$

Voor x, y, z coördinaten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_{01}^0}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial x_1} = \frac{\mathbf{R}_s(3\mathbf{R}_s - 4\mathbf{r})}{2\mathbf{r}^8 \sigma^4} \\ \frac{\partial \Gamma_{00}^1}{\partial x_1} &= \frac{\mathbf{R}_s^2}{2\mathbf{r}^4} \\ \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x_1} &= \frac{6}{\mathbf{r}^6 \sigma^4} - \frac{10\mathbf{R}_s}{\mathbf{r}^7 \sigma^4} + \frac{4 \cdot 5\mathbf{R}_s^2}{\mathbf{r}^8 \sigma^4} \\ \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_1} &= \frac{2\mathbf{R}_s - 3\mathbf{r}}{\mathbf{r} \sin^2 \theta} = -3 + \frac{2\mathbf{R}_s}{\mathbf{r}} \\ \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial x_1} &= \left(-3 + \frac{2\mathbf{R}_s}{\mathbf{r}} \right) \cdot \sin^2 \theta = -3 + \frac{2\mathbf{R}_s}{\mathbf{r}} \\ \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial x_1} = \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial x_1} = \frac{\partial \Gamma_{31}^3}{\partial x_1} = \frac{-3}{\mathbf{r}^6} \\ \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial x_1} = \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial x_1} = \frac{\partial \Gamma_{32}^3}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_2} &= \frac{2\mathbf{r}^3 \sigma^2 \cos \theta}{\sin^4 \theta} = 0 \\ \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial x_2} &= -2\mathbf{r}^3 \sigma^2 \cos \theta = 0 \\ \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial x_2} &= -3 \cos^2 \theta + 1 = 1 \\ \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial x_2} &= \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = 1 \\ \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial x_2} &= \frac{\partial \Gamma_{32}^3}{\partial x_2} = \frac{-1 - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = -1\end{aligned}$$

$$R_{jkl}^i = \Gamma_{jl,k}^i - \Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{jl}^u \Gamma_{uk}^i - \Gamma_{jk}^u \Gamma_{ul}^i$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\rho,\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho}^\rho = -\Gamma_{\mu\nu,\rho}^\rho + \Gamma_{\mu\rho,\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\rho + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho$$

Na enkele berekeningen was de conclusie dat, om alle elementen van de Ricci-tensor nul te krijgen in vacuüm, de formule voor het Christoffel-symbool moet beginnen met een positieve +1/2:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = +\frac{1}{2}g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\}$$

Het teken aan het begin van de Christoffelsymbolen heeft geen invloed op het **product** van de Christoffelsymbolen in het element van de Ricci-tensor, maar alleen op het teken van de eerste twee termen: de **afgeleiden van de Christoffelsymbolen**.

Schwarzschild symmetrie:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = & \Gamma_{\mu\nu,0}^0 - \Gamma_{0\mu,\nu}^0 + \Gamma_{0\lambda}^0 \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^0 \Gamma_{0\mu}^\lambda \\ & + \Gamma_{\mu\nu,1}^1 - \Gamma_{1\mu,\nu}^1 + \Gamma_{1\lambda}^1 \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^1 \Gamma_{1\mu}^\lambda \\ & + \Gamma_{\mu\nu,2}^2 - \Gamma_{2\mu,\nu}^2 + \Gamma_{2\lambda}^2 \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^2 \Gamma_{2\mu}^\lambda \\ & + \Gamma_{\mu\nu,3}^3 - \Gamma_{3\mu,\nu}^3 + \Gamma_{3\lambda}^3 \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^3 \Gamma_{3\mu}^\lambda \end{aligned}$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\rho - \Gamma_{\rho\mu,\nu}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda$$

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 = \frac{R_s^2}{2r^4} - \frac{1}{2} \frac{4r - 3R_s}{r^4 \sigma^2} \frac{1}{2} R_s \sigma^2 - \frac{1}{2} R_s \sigma^2 \frac{1}{2} \frac{R_s}{r^4 \sigma^2} - \frac{1}{2} \frac{R_s}{r^4 \sigma^2} \frac{1}{2} R_s \sigma^2$$

$$R_{11} = -\Gamma_{01,1}^0 - \Gamma_{21,1}^2 - \Gamma_{31,1}^3 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{32,2}^3 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1$$

$$R_{33} = \Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3$$

Voor sferische coördinaten en de Schwarzschild-configuratie met $\theta = 90^\circ$, zijn de volgende elementen van de Ricci-tensor relevant:

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1$$

$$R_{11} = -\Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{23,2}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{32}^3 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3$$

$$R_{33} = +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta \cdot R_{22}$$

Wanneer $\theta \neq 90^\circ$ dan is er respectievelijk voor R_{22} and R_{33} een extra term $+\Gamma_{22}^2 \Gamma_{32}^3$ en $+\Gamma_{33}^2 \Gamma_{22}^2$.

Appendix 2 Afleiding van Afgeleide van de Christoffelsymbolen in een Algemene Vorm

Er wordt aangetoond hoe het Christoffel-symbool alleen afhangt van de elementen van de metrische tensor en diens afgeleiden. Dit is handig bij gebruik in een spreadsheet of programma.

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\rho\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\} + \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} \right\}$$

$$\frac{\partial g^{\rho\alpha}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \frac{1}{g_{\rho\alpha}} = \frac{-1}{g_{\rho\alpha}^2} \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\gamma}} = -(g^{\rho\alpha})^2 \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\gamma}}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{-1}{2} (g^{\rho\alpha})^2 \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\} + \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} \right\}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left[-g^{\rho\alpha} \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\} + \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} \right\} \right]$$

Of:

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\gamma}} = -g^{\rho\alpha} \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \cdot \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} \right\}$$

Appendix 3 Wiskundige Uitwerking van Schwarzschild

Hier zullen we de Christoffelsymbolen uitwerken voor de metrische tensor van de Schwarzschild-configuratie.

Schwarzschild in r, theta, phi coördinaten:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \left\{ \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\}$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\}$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\}$$

Alle elementen in de metrische tensor zijn nul, behalve de elementen in de diagonaal. Dit betekent dat de contravariante elementen de directe inverse zijn van de covariante componenten. Dus bijvoorbeeld $g^{00} = \frac{1}{g_{00}}$ enzovoort.

Voor r , θ , ϕ coördinaten:

Afgeleiden van gamma naar $x_1=r$:

$$0011 = 0101 = \frac{\partial \Gamma_{01}^0}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial r} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{00}^2} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{g_{00}} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial r^2} \right\} = \frac{1}{2g_{00}} \left\{ \frac{-1}{g_{00}} (g_{00}')^2 + g_{00}'' \right\}$$

$$1001 = \frac{\partial \Gamma_{00}^1}{\partial r} = \frac{-1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial r^2} \right\} = \frac{-1}{2g_{11}} \left\{ \frac{-1}{g_{11}} g_{11}' g_{00}' + g_{00}'' \right\}$$

$$1111 = \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial r} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{11}^2} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial r^2} \right\} = \frac{1}{2g_{11}} \left\{ \frac{-1}{g_{11}} (g_{11}')^2 + g_{11}'' \right\}$$

$$1221 = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial r} = \frac{-1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial r^2} \right\} = \frac{-1}{2g_{11}} \left\{ \frac{-1}{g_{11}} g_{11}' g_{22}' + g_{22}'' \right\}$$

$$1331 = \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial r} = \frac{-1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r^2} \right\} = \frac{-1}{2g_{11}} \left\{ \frac{-1}{g_{11}} g_{11}' g_{33}' + g_{33}'' \right\}$$

$$2121 = 2211 = \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial r} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{22}^2} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial r^2} \right\} = \frac{1}{2g_{22}} \left\{ \frac{-1}{g_{22}} (g_{22}')^2 + g_{22}'' \right\}$$

$$3131 = 3311 = \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{31}^3}{\partial r} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{33}^2} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r^2} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \left\{ \frac{-1}{g_{33}} (g_{33}')^2 + g_{33}'' \right\}$$

$$2331 = \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial r} = \frac{-1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{22}^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\} = \frac{-1}{2g_{22}} \left\{ \frac{-1}{g_{22}} g_{22}' \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\}$$

$$3231 = 3321 = \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{32}^3}{\partial r} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{33}^2} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \left\{ \frac{-1}{g_{33}} g_{33}' \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\}$$

Afgeleiden van gamma naar $x_2=\theta$:

$$1222 = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial \theta} = \frac{-1}{2g_{11}} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial r \partial \theta}$$

$$1332 = \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial \theta} = \frac{-1}{2g_{11}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta}$$

$$2332 = \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial \theta} = \frac{-1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{22}^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta^2} \right\} = \frac{-1}{2g_{22}} \left\{ \frac{-1}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta^2} \right\}$$

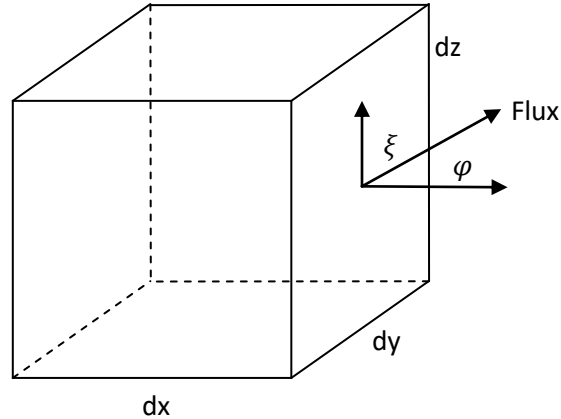
$$2222 = \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{22}^2} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial \theta^2} \right\} = \frac{1}{2g_{22}} \left\{ \frac{-1}{g_{22}} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial \theta^2} \right\}$$

$$3312 = 3132 = \frac{\partial \Gamma_{31}^3}{\partial \theta} = \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{33}^2} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \left\{ \frac{-1}{g_{33}} g_{33}' \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\}$$

$$3232 = 3322 = \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial \theta} = \frac{\partial \Gamma_{32}^3}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{33}^2} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta^2} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \left\{ \frac{-1}{g_{33}} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta^2} \right\}$$

Appendix 4 Afleiding van de Stelling van Gauss

We beginnen met een kubus:



Door deze oneindig kleine kubus stroomt een flux F . Deze flux is niet overal hetzelfde en is daarom een functie van x , y , z en t . De flux is een vector, omdat deze zowel een grootte als een richting heeft.

$$Flux = \vec{F}(x, y, z, t) \quad (1)$$

De flux die door de rechterzijde stroomt is:

$$Flux_{rightside} = \vec{F} \sin \xi dydz \quad (2)$$

Hier is ξ de hoek tussen de fluxrichting en het oppervlak. De fluxcomponent loodrecht op het oppervlak stroomt daadwerkelijk door dat oppervlak. Het oppervlak is het kruisproduct van dx en dy en vormt een nieuwe vector:

$$d\vec{A} = \vec{dy} \times \vec{dz} \quad \text{met grootte} \quad dA = \sin \xi dydz \quad (3)$$

Dus, de flux die door de rechterzijde stroomt:

$$Flux_{rightside} = \vec{F} \sin \xi dydz = \vec{F} \cos \left(\frac{1}{2} \pi - \xi \right) d\vec{A} = \vec{F} \cos \varphi d\vec{A} = \vec{F} d\vec{A} \cos \varphi \quad (4)$$

De vector dA staat loodrecht op het oppervlak en φ is hier de complementaire hoek van ξ . Dus zien we hier het inwendig product:

$$Flux_{rightside} = \vec{F} d\vec{A} \cos \varphi = \vec{F} \cdot d\vec{A} \quad (5)$$

Als de kubus niet oneindig klein is, kunnen we integreren:

$$Flux_{cube} = \iint_{right} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{left} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{front} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{back} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{under} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{above} \vec{F} \cdot d\vec{A} \quad (6)$$

We kunnen dit ook schrijven als een integraal over het totale oppervlak van de kubus:

$$Flux_{cube} = \oint_{cube} \vec{F} \cdot d\vec{A} \quad (7)$$

Nu gebruiken we een andere benadering. Eerst bekijken we de x-richting. De flux komt de kubus binnen vanaf de linkerkant:

$$Flux_{left} = F_x dydz \quad (8)$$

Deze flux verlaat de rechterzijde, vermeerderd of verminderd met $d\phi$ vanuit de y- of z-richting:

$$Flux_{right} = (F_x + dF_x) dydz \quad (9)$$

Dus, de netto flux in de x-richting wordt

$$Flux_x = Flux_{right} - Flux_{left} = (F_x + dF_x) dydz - F_x dydz = dF_x dydz \quad (10)$$

Hetzelfde geldt voor de y- en z-richting:

$$Flux_y = dF_y dxdz \quad (11)$$

$$Flux_z = dF_z dxdy \quad (12)$$

De totale flux door de kubus:

$$\begin{aligned} Flux_{cube} &= Flux_x + Flux_y + Flux_z = dF_x dydz + dF_y dxdz + dF_z dxdy \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} dxdydz + \frac{\partial F_y}{\partial y} dxdydz + \frac{\partial F_z}{\partial z} dxdydz = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dxdydz \\ &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV \end{aligned} \quad (13)$$

De operator $\vec{\nabla}$ is:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (14)$$

Dus vergelijking (13) wordt:

$$Flux_{kubus} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad (15)$$

Door te integreren over de gehele kubus, vinden we de netto flux door de kubus:

$$Flux_{kubus} = \iiint_{kubus} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad (16)$$

De vergelijkingen (7) en (15) vertegenwoordigen beide dezelfde flux door de kubus, dus:

$$\oiint_{kubus} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{kubus} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad (17)$$

We begonnen met een oneindig kleine kubus en omdat de integratie is uitgevoerd, is het irrelevant of het een kubus of een andere willekeurige vorm is, dus we kunnen de term "kubus" weglaten:

$$\oiint \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad (18)$$

Deze vergelijking staat bekend als de stelling van Gauss.

In het bijzondere geval waarin de netto flux door het gesloten oppervlak nul is (er wordt niets gegenereerd of verdwijnt binnen het volume):

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV = 0 \quad (19)$$

Dus:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \quad (20)$$

Dit kan ook worden geschreven als:

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

Of in Einstein-notatie:

$$\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (22)$$

Appendix 5 Afleiding van de Laplace- en Poisson-vergelijkingen

Een vectorveld waarvoor het niet uitmaakt welk traject is afgelegd om van een willekeurig punt naar een ander te gaan, d.w.z. elke gekozen route kost dezelfde hoeveelheid energie, wordt een *conservatief veld* genoemd. Laten we dit veld F noemen. Voor een conservatief veld bestaat er een scalaire functie φ met de volgende relatie:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi \quad (1)$$

Waarbij $\vec{\nabla}$ de operator is:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2)$$

Het zwaartekrachtsveld F_g is een conservatief veld:

$$\vec{F}_g = \vec{\nabla}\varphi \quad (3)$$

Volgens de stelling van Gauss:

$$\oint_A \vec{F}_g \cdot d\vec{A} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_g \, dV \quad (4)$$

Met als resultaat in vacuüm:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_g = 0 \quad (5)$$

We concluderen nu uit (5) en (3) dat:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_g = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi = 0 \quad (6)$$

Om dit verder uit te werken:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi = 0 \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi = 0$$

Omdat x, y, z orthogonaal zijn houden we over:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \varphi = 0$$

Dit wordt ook geschreven als:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{of} \quad \Delta \varphi = 0 \quad (8)$$

De operator ∇^2 wordt de Laplaciaan genoemd:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Dus, voor vacuüm geldt: $\nabla^2 \varphi$ of $\Delta \varphi = 0$.

Nu doen we de berekening binnen een massa.

Volgens Newton is het zwaartekrachtsveld:

$$\vec{F}_g = G \frac{m}{r^2} \hat{r} \quad (9)$$

Hierbij is $\hat{r}$ de eenheidsvector.

Gebruik opnieuw de stelling van Gauss:

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_g dV = \oiint_A \vec{F}_g \cdot d\vec{A} \quad (10)$$

$$\iiint_V \Delta \varphi dV = \oiint_A G \frac{m}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{A} = \oiint_A G \frac{m}{r^2} dA$$

Als we het volume als een bol beschouwen, dan is:

$$A = 4\pi r^2 \quad (11)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (12)$$

Omdat de straal r van de bol constant blijft over het totale oppervlak van de bol, wordt vergelijking (10):

$$\iiint_V \Delta \varphi dV = \oiint_A G \frac{m}{r^2} dA = G \frac{m}{r^2} \oiint_A dA = G \frac{m}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi Gm \quad (13)$$

Met ρ als de massadichtheid:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (14)$$

Dus wordt (13):

$$\iiint_V \Delta\phi dV = 4\pi Gm = 4\pi G \iiint_V \rho dV = \iiint_V 4\pi G\rho dV \Rightarrow \Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (15)$$

Dus, voor een **volume waar flux** wordt gegenereerd, d.w.z. massa veroorzaakt zwaartekracht, is de **Poisson-vergelijking** van toepassing:

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (16)$$

Of:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$$

En zoals boven reeds gevonden geldt in een **lege ruimte** voor de **Laplace-vergelijking**:

$$\Delta\phi = 0 \quad (17)$$

Of:

$$\nabla^2\phi = 0$$

Overweging:

Het bestaan van massa veroorzaakt zwaartekrachtsflux. Wanneer je binnen een massabool bent en naar buiten beweegt, verandert de hoeveelheid ingesloten massa en dus verandert ook de totale flux ($\Delta\phi = 4\pi G\rho$). Wanneer je uiteindelijk buiten de massabool bent, blijft de massa ingesloten en blijft de totale flux constant ($\Delta\phi = 0$).

Appendix 5.1 De Laplace-operator toegepast op het Zwaartekrachtspotentiaal van een Statische Bol

Vervolgens passen we de Laplace-operator toe op het zwaartekrachtspotentiaal buiten een bol ([Appendix 5.1.1](#)) en binnen een statische bol ([Appendix 5.1.2](#))

De zwaartekracht volgens Newton is:

$$F = mg = \frac{mMG}{r^2} \Rightarrow \text{zwaartekrachtsveld: } g = \frac{MG}{r^2} \Rightarrow \text{zwaartekrachtspotentiaal: } \phi_{\text{newton}} = \frac{-MG}{r}$$

$$\text{waarbij } g = \frac{d\phi_{\text{newton}}}{dr}$$

Hier is r de afstand ten opzichte van het centrum van de bol en R is de straal van de bol. M is de massa van de bol en m is de massa van een deeltje.

De zwaartekrachtspotentiaal **buiten** een bol in de algemene relativiteitstheorie (GR) is (hoofdstuk 2.8 [vergelijking 5](#)):

$$\begin{aligned} \phi = g_{00} &= 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 + \frac{2\phi_{\text{newton}}}{c^2} \\ \Rightarrow \phi_{\text{newton}_\text{buiten}} &= -\frac{GM}{r} \end{aligned} \quad (1)$$

Zwaartekrachtspotential **binnen** een bol (zie afleiding hieronder):

$$\begin{aligned}\phi &= 1 - \frac{3GM}{c^2 R} + \frac{GM}{c^2} \frac{r^2}{R^3} = 1 + \frac{2}{c^2} \cdot \left(-\frac{3GM}{2R} + \frac{GM}{2} \frac{r^2}{R^3} \right) \\ \Rightarrow \phi_{\text{newton_binnen}} &= -\frac{3GM}{2R} + \frac{GM}{2} \frac{r^2}{R^3}\end{aligned}\quad (2)$$

Zie [Appendix 5.1.4 vergelijking 3](#).

Vervolgens de toepassing van de Laplace-operator op de zwaartekrachtspotential buiten en binnen een bol, waarbij:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Appendix 5.1.1 **Buiten een Bol (Laplace)**

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \Rightarrow 2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

Zie [vergelijking 1](#) in [Appendix 5.1](#).

$$\begin{aligned}\phi_{\text{newton_buiten}} &= -\frac{GM}{r} \\ \frac{\partial \phi_{\text{newton}}}{\partial x} &= \frac{\partial \phi_{\text{newton}}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{GM}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{GMx}{r^3} \\ \frac{\partial^2 \phi_{\text{newton}}}{\partial x^2} &= \frac{-3GMx}{r^4} \cdot \frac{x}{r} + \frac{GM}{r^3} = \frac{-3GMx^2}{r^5} + \frac{GM}{r^3}\end{aligned}$$

Hetzelfde geldt voor y en z, dus totaal:

$$\begin{aligned}\Delta \phi_{\text{newton}} &= \frac{\partial^2 \phi_{\text{newton}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{\text{newton}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_{\text{newton}}}{\partial z^2} \\ \Delta \phi_{\text{newton}} &= \frac{-3GM}{r^3} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + 3 \frac{GM}{r^3} = \frac{-3GM}{r^3} + 3 \frac{GM}{r^3} = 0\end{aligned}$$

Dus:

Dus:

$$\Delta \phi_{\text{newton}} = 0.$$

Appendix 5.1.2 Binnen een Bol (Poisson)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

Zie [vergelijking 2](#) in [Appendix 5.1](#).

$$\begin{aligned}\phi_{\text{newton_binnen}} &= -\frac{3GM}{2R} + \frac{GM}{2} \frac{r^2}{R^3} \\ \frac{\partial \phi_{\text{newton}}}{\partial x} &= \frac{\partial \phi_{\text{newton}}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2GM}{2} \frac{r}{R^3} \frac{x}{r} = \frac{GMx}{R^3} \\ \frac{\partial^2 \phi_{\text{newton}}}{\partial x^2} &= \frac{GM}{R^3}\end{aligned}$$

Hetzelfde geldt voor y en z:

$$\Delta \phi_{\text{newton}} = \frac{\partial^2 \phi_{\text{newton}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{\text{newton}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_{\text{newton}}}{\partial z^2} = \frac{3GM}{R^3} = \frac{3G \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \rho}{R^3} = 4\pi G\rho$$

Dus

$$\Delta \phi_{\text{newton}} = 4\pi G\rho \quad (3)$$

Dit komt overeen met de Poisson-vergelijking.

Dus:

$$\begin{aligned}\phi &= 1 + \frac{2\phi_{\text{newton}}}{c^2} \Rightarrow \Delta \phi = \frac{2}{c^2} \Delta \phi_{\text{newton}} = \frac{2}{c^2} 4\pi G\rho = \frac{8\pi G\rho}{c^2} \\ \Delta \phi &= \frac{8\pi G\rho}{c^2}\end{aligned}$$

Appendix 5.1.3 Vereenvoudiging van de Toepassing van de Laplace-/Poisson-operator

Laten we aannemen dat we een functie $f(r)$ hebben waarop de Laplace-operator wordt toegepast.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Gradiënt van $f(r)$:

$$\begin{aligned}\nabla f(r) &= \left(\frac{\partial f(r)}{\partial x}, \frac{\partial f(r)}{\partial y}, \frac{\partial f(r)}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial f(r)}{\partial x} &= \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{\vec{x}}{r}\end{aligned} \quad (1)$$

De gradiënt van $f(r)$:

$$\nabla f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \left(\frac{\vec{x}}{r} + \frac{\vec{y}}{r} + \frac{\vec{z}}{r} \right) = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \hat{r}$$

Verdere differentiatie van (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} \cdot \frac{x}{r} \cdot \frac{x}{r} + \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{x}{r^2} \cdot \frac{x}{r} \\ \frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Nu voor x, y, en z:

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(3 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \right)$$

De Laplace-/Poisson-vergelijking:

$$\Delta f(r) = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial f(r)}{\partial r} \quad (2)$$

Laten we de algemene vorm van ϕ_{newton} nemen:

$$\phi_{newton} = L + Kr^n \quad (3)$$

Waarbij L en K constanten zijn.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{newton}}{\partial r} &= nKr^{n-1} \\ \frac{\partial^2 \phi_{newton}}{\partial r^2} &= n(n-1)Kr^{n-2} \end{aligned}$$

Daarom, volgens vergelijking (2):

$$\begin{aligned} \Delta \phi_{newton} &= n(n-1)Kr^{n-2} + \frac{2}{r} \cdot nKr^{n-1} = n(n-1)Kr^{n-2} + 2nKr^{n-2} \\ \Delta \phi_{newton} &= n(n+1)Kr^{n-2} \quad (4) \end{aligned}$$

Laten we deze formule toepassen op de gravitatiepotentialen buiten en binnen een bol.

Outside a sphere:

$$\phi_{newton} = -\frac{GM}{r}$$

Dus, volgens (3)

$$\phi_{newton} = L + Kr^n$$

Waarbij $n = -1$, $L=0$ en $K = -GM$. Dan volgens (4):

$$\Delta\phi_{newton} = -1(-1 + 1)GM r^{-1-2} = 0 \cdot GM r^{-3} = 0$$

Binnen een bol:

$$\phi_{newton} = -\frac{3GM}{2R} + \frac{GM}{2} \frac{r^2}{R^3}$$

Dus, volgens (3)

$$\phi_{newton} = L + Kr^n$$

Waarbij $n=+2$, $L=-3GM/2R$ en $K=GM/2R^3$

$$\Delta\phi_{newton} = +2(2 + 1) \frac{GM}{2R^3} r^{2-2} = 6 \frac{GM}{2R^3} = \frac{3GM}{R^3} = \frac{3G \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \rho}{R^3} = 4\pi G \rho$$

Dit komt overeen met de berekeningen in het vorige hoofdstuk.

Verder kan worden gezien dat $\Delta\phi_{newton}$ nul is wanneer $n=0$ of -1 , en uiteraard wanneer r naar oneindig gaat terwijl $n < 2$.

Appendix 5.1.4 **Afleiding van de Gravitatiepotentiaal Binnen een Statische Bol**

De gravitatiepotentiaal binnen een statische bol zal worden afgeleid op basis van de Poisson-vergelijking:

$$\Delta\phi_{newton} = 4\pi G \rho.$$

En de algemene vorm van ϕ_{newton} :

$$\phi_{newton} = L + Kr^n$$

Met formule (4) die hierboven is afgeleid:

$$\Delta\phi_{newton} = n(n + 1)Kr^{n-2} \quad (2)$$

Hieruit volgt:

$$4\pi G \rho = n(n + 1)Kr^{n-2}$$

Dit geeft aan dat bij $n=2$, geldt:

$$6K = 4\pi G \rho \Rightarrow K = \frac{2}{3} \pi G \rho = \frac{2}{3} \pi G \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{1}{2} \frac{GM}{R^3}$$

Dus het gravitatiepotentiaal binnen een statische bol is:

$$\Rightarrow \phi_{newton} = L + \frac{2}{3} \pi G \rho r^2$$

Op het oppervlak van de bol, waar geldt $r=R$:

$$\phi_{newton} = -\frac{GM}{R}$$

Voor een continue overgang van ϕ op het oppervlak van de bol (bij $r=R$), moet het buitenste gravitatiepotentiaal gelijk zijn aan het binnenste gravitatiepotentiaal:

$$\phi_{newton} = -\frac{GM}{R} = -\frac{4}{3}\pi \frac{R^3}{R} G\rho = -\frac{4}{3}\pi R^2 G\rho = L + \frac{2}{3}\pi G\rho R^2$$

Dit geeft:

$$L = -\frac{4}{3}\pi R^2 G\rho - \frac{2}{3}\pi G\rho R^2 = -\frac{6}{3}\pi R^2 G\rho = -\frac{6}{3}\pi R^2 G \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = -\frac{3}{2} \frac{MG}{R}$$

De gravitatiepotentiaal binnen de bol wordt dan:

$$\phi_{newton} = L + \frac{2}{3}\pi G\rho r^2 = L + \frac{2}{3}\pi G r^2 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = L + \frac{1}{2} \frac{GM}{R^3} r^2$$

Dus:

$$\phi_{newton} = -\frac{3}{2} \frac{MG}{R} + \frac{1}{2} \frac{GM}{R^3} r^2$$

De versnelling g_r is de afgeleide van ϕ_{newton} ten opzichte van r :

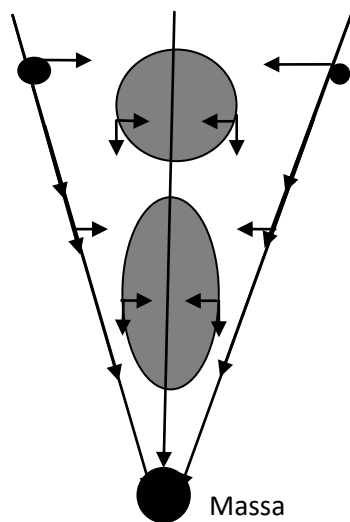
$$g_r = \frac{d\phi_{newton}}{dr} = \frac{GM}{R^3} r$$

Bij $r=0$ is de versnelling $g_r = 0$ en bij $r=R$ is de versnelling $g_r = \frac{GM}{R^2}$.

Gravitatiepotentiaal binnen de bol:

$$\phi = 1 + \frac{2\phi_{newton}}{c^2} = 1 - \frac{3MG}{c^2 R} + \frac{GM}{c^2 R^3} r^2 \quad (3)$$

Appendix 6 Getijdenkrachten



Getijdenkrachten

De lijnen van het gravitatieveld, veroorzaakt door een massa, zijn niet parallel maar gericht naar het centrum van de massa. De grootte van de kracht is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot het centrum van de massa. De gravitatiekrachten op het grijze lichaam kunnen worden opgesplitst in horizontale en verticale componenten. Het grijze lichaam wordt samengedrukt door de horizontale componenten van de kracht, en het lichaam wordt verticaal uitgerekt doordat het gravitatieveld toeneemt naarmate men dichterbij de massa komt.

Dus, aangezien de lijnen van het gravitatieveld radiaal gericht zijn, wordt de kracht een getijdenkracht genoemd.

In het geval van een "zwart gat" zijn de krachten zo enorm dat het grijze lichaam zodanig wordt uitgerekt dat dit fenomeen "spaghettificatie" wordt genoemd.

Appendix 7 Speciale Relativiteitstheorie

In de Speciale Relativiteitstheorie beschouwde Einstein alleen coördinatenstelsels die uniform bewogen, dus met constante snelheid ten opzichte van elkaar; de invloed van massa's, en dus zwaartekracht, werd niet meegenomen. De aannames waarop de Speciale Relativiteitstheorie is gebaseerd, zijn:

- De maximaal mogelijke snelheid, in elk coördinatenstelsel, is de lichtsnelheid $c=299\,792\,458$ m/s.
- De natuurwetten zijn geldig in elk uniform bewegend coördinatenstelsel.

In de benadering van Newton waren de tijdsintervallen gelijk in het "ruststelsel" en in het bewegende stelsel. Echter, via de Speciale Relativiteitstheorie werd aangetoond dat de **tijdsintervallen** in een bewegend stelsel anders en kleiner zijn dan in een ruststelsel. Bovendien wordt de **lengte van een object** beïnvloed door zijn snelheid en neemt af, ten opzichte van het ruststelsel, in de bewegingsrichting.

Beide waren gevolgen van de waarneming dat de lichtsnelheid in vacuüm altijd hetzelfde is in elk stelsel, ongeacht de snelheid van het stelsel.

In dit hoofdstuk vatten we een aantal punten samen die vaak worden gebruikt in de Speciale Relativiteitstheorie (SR) en die relevant zijn voor de toepassing in de Algemene Relativiteitstheorie (GR).

We beginnen met het vaststellen van de relatie tussen twee coördinatenstelsels die met een constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen. Deze relatie staat bekend als de Lorentztransformatie, waarvan de afleiding hieronder wordt getoond.

Appendix 7.1 Eenvoudige Afleiding van de Lorentztransformatie

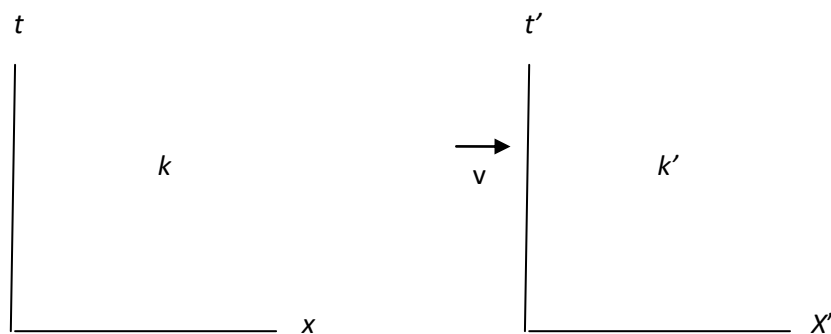


Fig. 1

Coördinaat systeem k' beweegt uniform met een snelheid v ten opzichte van coördinaat systeem k .

We nemen twee coördinatensystemen waarvan de oorsprongen zich met een constante snelheid v , ten opzichte van elkaar bewegen, respectievelijk in de x en x' richting. Hoewel de coördinatensystemen vierdimensionaal zijn (t, x, y, z) worden alleen de t - en x -assen getekend omwille van de eenvoud, omdat er geen beweging is in de y - en z -richtingen.

Een lichtsignaal wordt uitgezonden op tijd $t = t' = 0$ in de richting van de positieve x -as, volgens de vergelijking:

$$x = ct$$

Of:

$$x - ct = 0 \quad (1)$$

Aangezien hetzelfde lichtsignaal met de snelheid c wordt uitgezonden ten opzichte van k' , zal de voortplanting ten opzichte van het systeem k' worden weergegeven door de analoge formule:

$$x' - ct' = 0 \quad (2)$$

Die ruimte-tijdpunten (gebeurtenissen) die aan (1) voldoen, moeten ook aan (2) voldoen. Dit is duidelijk het geval wanneer de relatie:

$$(x' - ct') = \lambda(x - ct) \quad (3)$$

algemeen geldt, waarbij λ een constante aanduidt; want volgens (3) leidt het verdwijnen van $(x - ct)$ tot het verdwijnen van $(x' - ct')$ voor iedere waarde van λ .

Als we soortgelijke overwegingen toepassen op lichtstralen die langs de negatieve x -as worden uitgezonden, verkrijgen we de voorwaarde:

$$(x' + ct') = \mu(x + ct) \quad (4)$$

Door vergelijkingen (3) en (4) op te tellen (of af te trekken) en de constanten a en b in te voeren in plaats van λ en μ , waarbij:

$$a = \frac{\lambda + \mu}{2}$$

en

$$b = \frac{\lambda - \mu}{2}$$

verkrijgen we de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x' &= ax - bct \\ ct' &= act - bx \end{aligned} \quad (5)$$

We zouden dus de oplossing van ons probleem hebben als de constanten a en b bekend waren. Deze volgen uit de volgende discussie.

Voor de oorsprong van k' geldt permanent $x' = 0$, en daarom hebben we volgens de eerste van de vergelijkingen (5)

$$x = \frac{bc}{a} t$$

Als we v de snelheid noemen waarmee de oorsprong van k' beweegt ten opzichte van k , dan hebben we:

$$v = \frac{bc}{a} \quad (6)$$

Dezelfde waarde v kan worden verkregen uit vergelijking (5), als we de snelheid van een ander punt van k' ten opzichte van k berekenen, of de snelheid (gericht naar de negatieve x -as) van een punt van k ten opzichte van k' . Kortom, we kunnen v aanduiden als de relatieve snelheid van de twee systemen.

Bovendien leert het relativiteitsprincipe ons dat, zoals beoordeeld vanuit k , de lengte van een meetlat die in rust is ten opzichte van k' , precies hetzelfde moet zijn als de lengte, zoals beoordeeld vanuit k' , van een meetlat die in rust is ten opzichte van k . Om te zien hoe de punten op de x' -as er vanuit k uitzien, hoeven we alleen maar een "momentopname" te maken van k' vanuit k ; dit betekent dat we een bepaalde waarde van t (de tijd van k) moeten invoeren, bijvoorbeeld $t=0$. Voor deze waarde van t verkrijgen we dan uit de eerste van de vergelijkingen (5):

$$x' = ax$$

Twee punten op de x' -as, die gescheiden zijn door de afstand $x'=L$ wanneer gemeten in het k' -systeem, zijn dus in onze momentopname gescheiden door de afstand:

$$\Delta x = \frac{L}{a} \quad (7)$$

Maar als de momentopname wordt gemaakt vanuit $k'(t'=0)$, en als we t elimineren uit de vergelijkingen (5), rekening houdend met de uitdrukking (6), krijgen we:

$$\begin{aligned} 0 &= act - bx \\ t &= \frac{b}{ac} x \\ x' &= ax - bct = ax - \frac{b^2}{a} x = ax \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \end{aligned}$$

Uit (6) krijgen we:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{v}{c} \\ \Rightarrow x' &= a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x \end{aligned} \quad (7a)$$

Hieruit concluderen we dat twee punten op de x -as, gescheiden door de afstand L (ten opzichte van k), in onze momentopname worden weergegeven door de afstand:

$$\Delta x' = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) L \quad (7b)$$

Maar uit wat is gezegd, moeten de twee momentopnamen identiek zijn; dus Δx in (7) moet gelijk zijn aan $\Delta x'$ in (7b), zodat we verkrijgen:

$$\begin{aligned} \Delta x = \frac{L}{a} &= \Delta x' = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) L \\ \frac{1}{a} &= a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \\ \Rightarrow a^2 &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned} \quad (7c)$$

De vergelijkingen (6) en (7c) bepalen de constanten a en b . Door de waarden van deze constanten in te voegen in (5), verkrijgen we de vergelijkingen:

$$x' = ax - bct = ax - avt = a(x - vt)$$

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
ct' &= act - bx = act - \frac{av}{c}x = ac \left(t - \frac{v}{c^2}x \right) \\
t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned} \tag{8}$$

Zo hebben we de Lorentztransformatie verkregen voor gebeurtenissen op de x-as.
Deze voldoet aan de voorwaarde:

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2 \tag{8a}$$

De uitbreiding van dit resultaat om gebeurtenissen buiten de x- as op te nemen, wordt verkregen door de vergelijkingen (8) te behouden en aan te vullen met de relaties:

$$\begin{aligned}
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned} \tag{9}$$

Op deze manier voldoen we aan het postulaat van de constante lichtsnelheid *in vacuo* voor lichtstralen in willekeurige richtingen, zowel voor het systeem *k* als voor het systeem *k'*. Dit kan als volgt worden aangetoond.

We veronderstellen dat een lichtsignaal wordt uitgezonden vanuit de oorsprong van *k* op het tijdstip $t = 0$. Het zal zich voortplanten volgens de vergelijking:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct$$

Of, als we deze vergelijking kwadrateren, volgens de vergelijking:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \tag{10}$$

Volgens de wet van voortplanting van licht, in combinatie met het relativiteitspostulaat, moet de overdracht van het betreffende signaal — beoordeeld vanuit *K'*— plaatsvinden volgens de overeenkomstige formule:

$$r' = ct'$$

Of,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \tag{10a}$$

Om ervoor te zorgen dat vergelijking (10a) een gevolg is van vergelijking (10), moeten we hebben:

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2) = \sigma(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2) \tag{11}$$

Aangezien vergelijking (8a) moet gelden voor punten op de x-s, hebben we dus $\sigma = 1$; want (11) is een gevolg van (8a) en (9), en dus ook van (8) en (9). Zo hebben we de Lorentztransformatie afgeleid.

De Lorentztransformatie, weergegeven door (8) en (9), moet nog worden gegeneraliseerd. Het is duidelijk dat het niet uitmaakt of de assen van *k'* zo worden gekozen dat ze ruimtelijk parallel zijn aan die van *k*. Het is ook niet essentieel dat de snelheid van de translatie van *k'* ten opzichte van *k* in de richting van de x-as ligt. Een eenvoudige overweging toont aan dat we in staat zijn om de Lorentztransformatie in deze algemene zin te construeren uit twee soorten transformaties, namelijk uit Lorentztransformaties in de specifieke zin en uit puur ruimtelijke transformaties, wat overeenkomt met de vervanging van het rechthoekige coördinatensysteem door een nieuw systeem met zijn assen in andere richtingen.

Wiskundig kunnen we de gegeneraliseerde Lorentztransformatie als volgt karakteriseren: het drukt x', y', z', t' uit in termen van lineaire homogene functies van x, y, z, t , van een zodanige aard dat de relatie:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad (11a)$$

wordt voldaan. Dat wil zeggen: als we hun uitdrukkingen in x, y, z, t , vervangen in plaats van x', y', z', t' , aan de linkerkant, komt de linkerkant van (11a) overeen met de rechterkant.

We kunnen de Lorentztransformatie nog eenvoudiger karakteriseren als we de imaginaire grootheid

$$\sqrt{-1}ct$$

introduceren in plaats van ct , als tijdsvariabele. Als we dit invoeren:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= z \\ x_4 &= \sqrt{-1}.ct \end{aligned}$$

en hetzelfde doen voor het geaccentueerde systeem k' , dan kan de conditie die identiek wordt voldaan door de transformatie als volgt worden uitgedrukt:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (12)$$

Met deze keuze van "coördinaten" wordt (11a) omgezet in deze vergelijking.

We zien uit (12) dat de imaginaire tijdscoördinaat x_4 in de transformatievoorwaarde op exact dezelfde manier voorkomt als de ruimtelijke coördinaten x_1, x_2, x_3 . Dit komt doordat volgens de relativiteitstheorie de "tijd" x_4 op dezelfde manier in natuurwetten voorkomt als de ruimtelijke coördinaten x_1, x_2, x_3 .

Een vierdimensionaal continuüm beschreven door de "coördinaten" x_1, x_2, x_3, x_4 , werd door Minkowski "wereld" genoemd, en hij noemde een puntgebeurtenis een "wereldpunt." Van een "gebeurtenis" in driedimensionale ruimte wordt de natuurkunde als het ware een "bestaan" in de vierdimensionale "wereld."

Deze vierdimensionale "wereld" vertoont een sterke gelijkenis met de driedimensionale "ruimte" van de (Euclidische) analytische meetkunde. Als we in de laatste een nieuw Cartesiaans coördinatensysteem (x'_1, x'_2, x'_3) introduceren met hetzelfde oorsprongspunt, dan zijn x'_1, x'_2, x'_3 , lineaire homogene functies van x_1, x_2, x_3 , die identiek voldoen aan de vergelijking:

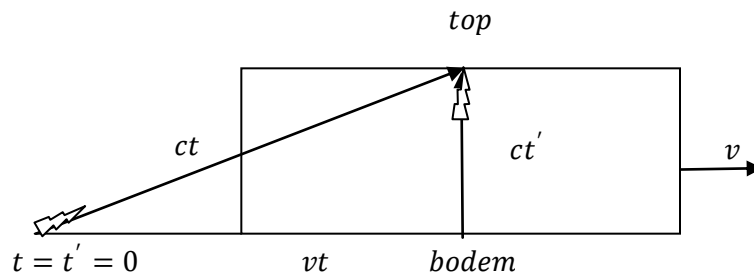
$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

De analogie met (12) is compleet. We kunnen Minkowski's "wereld" formeel beschouwen als een vierdimensionale Euclidische ruimte (met imaginaire tijdscoördinaat); de Lorentztransformatie komt overeen met een "rotatie" van het coördinatensysteem in de vierdimensionale "wereld".

Appendix 7.2 Alternatieve afleiding van tijddilatatie en lengtecontractie

Eerst leiden we de relatie af tussen de tijd t in ons coördinatenstelsel en de tijd t' in een systeem dat met een snelheid v beweegt. We nemen het beginpunt van ons stelsel gelijk aan het beginpunt van het bewegende stelsel op het tijdstip nul, waarbij $t = t' = 0$. Zoals Einstein stelde, is de snelheid van het licht in ons stelsel hetzelfde als in het bewegende stelsel.

We beschouwen een persoon in een snel bewegend object, bijvoorbeeld een raket die een lichtflits aanzet in de richting loodrecht op de bewegingsrichting van de raket.



De tijd in ons stelsel wordt aangeduid met t en de tijd in de bewegende raket met t' .

In de bovenstaande tekening gaat de flits recht omhoog, en de hoogte die wordt bereikt aan de andere kant van de raket is ct' . Terwijl de lichtflits zich van de "onderkant" naar de "bovenkant" in de raket verplaatst, beweegt de raket, vanuit ons stilstaande stelsel gezien, horizontaal naar rechts, en dus beweegt de flits ook van links naar rechts terwijl hij naar "boven" gaat. Nu beschouwen we de relatie tussen de afstanden die de flits in de raket en in ons stelsel heeft afgelegd. De volgende berekening kan worden gemaakt:

$$c^2 t^2 = c^2 t'^2 + v^2 t^2$$

$$c^2 t^2 - v^2 t^2 = c^2 t'^2$$

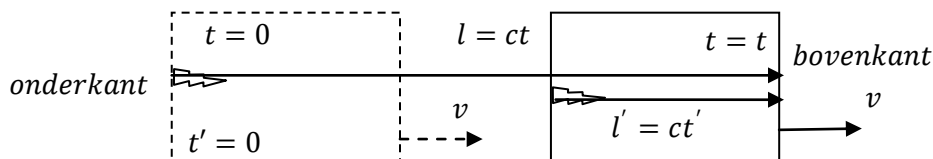
$$t^2 (c^2 - v^2) = c^2 t'^2$$

$$t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = t'^2$$

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dus uit deze berekening blijkt, gezien vanuit ons referentiekader, dat de tijd t' in de raket altijd korter is dan de tijd t in ons stelsel.

Vervolgens wordt een flits in de horizontale richting gestuurd. We beschouwen de afstand die de flits heeft afgelegd in ons stelsel en in de raket. Omdat de raket horizontaal naar rechts beweegt, is er geen beweging in de verticale richting. Dus de verticale richting zou niet beïnvloed moeten worden. De horizontale richting wordt beïnvloed door de horizontale snelheid.



We beschouwen de lengte van de afstand die de flits heeft afgelegd vanaf het moment dat deze begon vanaf de linkerkant, onderkant, van de raket tot het punt dat deze de rechterkant, bovenkant, van de raket bereikte. Vanuit het startpunt in ons stelsel is de afstand $l=ct$ en in de raket $l'=ct'$.

De lichtsnelheid in ons stelsel is gelijk aan de lichtsnelheid in de raket, zoals gezien vanuit ons gezichtspunt.

Dus:

$$c = \frac{l}{t} = \frac{l'}{t'}$$

Uit het eerste deel hierboven weten we:

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dus:

$$\frac{l}{t} = \frac{l'}{t'} = \frac{l'}{t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l = \frac{l'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

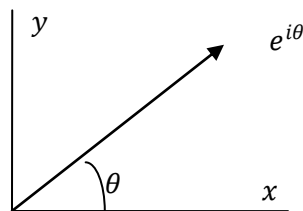
Dus de resulterende relaties zijn:

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{en} \quad l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dus, gezien vanuit ons referentiekader, is de tijd in het raketstelsel korter dan onze tijd en is de lengte van de raket korter.

Appendix 7.3 Goniometrische Hulpmiddelen

Omdat goniometrische formules vaak worden gebruikt in de speciale relativiteitstheorie, geven we een kort overzicht van een aantal ervan en hoe ze gemakkelijk kunnen worden afgeleid.



Per definitie:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1)$$

Waarbij:

$$i = \sqrt{-1}$$

Onderbouwing van deze vergelijking:

Ten eerste beschouwen we een functie:

$$F(x) = e^{\alpha x}$$

De afgeleide is:

$$\frac{d e^{\alpha x}}{dx} = \alpha e^{\alpha x}$$

Dus:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \alpha F(x)$$

Dus, de afgeleide van een functie $F(x) = e^{\alpha x}$ is een factor α maal die functie.

Vervolgens beschouwen we een functie:

$$F(x) = \cos \alpha x + i \sin \alpha x$$

Waarvan de afgeleide is:

$$\frac{d(\cos \alpha x + i \sin \alpha x)}{dx} = -\alpha \sin \alpha x + i \alpha \cos \alpha x = i \alpha (\cos \alpha x + i \sin \alpha x)$$

Hier zien we opnieuw dat:

$$\frac{dF(x)}{dx} = i \alpha F(x)$$

Waarbij:

$$F(x) = e^{i \alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x .$$

Hieruit kunnen we afleiden:

$$e^{i \theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1)$$

Vanuit deze vergelijking kunnen alle goniometrische formules worden afgeleid, zoals:

$$e^{-i \theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad (2)$$

Door (1) en (2) op te tellen, krijgen we:

$$\cos \theta = \frac{e^{i \theta} + e^{-i \theta}}{2}$$

En door (1) en (2) van elkaar af te trekken, krijgen we:

$$\sin \theta = \frac{e^{i \theta} - e^{-i \theta}}{2i}$$

Bovendien:

$$e^{i \theta} \cdot e^{-i \theta} = e^{i \theta - i \theta} = e^0 = 1 = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta) = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Vervolgens definiëren we de hyperbolische functies:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Uit deze vergelijkingen kunnen we afleiden:

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \cosh(-x) \\ \sinh(x) &= -\sinh(-x) \\ \cosh(ix) &= \cos(x) \\ -i\sinh(ix) &= \sin(x)\end{aligned}$$

Met deze hulpmiddelen zouden we in staat moeten zijn om alle benodigde goniometrische vergelijkingen af te leiden.

Appendix 7.4 Optelling van snelheden

We beschouwen twee coördinatensystemen A en B die met een constante snelheid v m/s ten opzichte van elkaar bewegen. De coördinatensystemen zijn zo gekozen dat de relatieve beweging tussen de systemen langs hun x -assen plaatsvindt. In A beweegt een object met snelheid V' met componenten in alle richtingen. Nu moeten we de snelheid van het object ten opzichte van systeem B beschouwen. Volgens Newton is de toegevoegde snelheid ten opzichte van systeem B $V_x' + v$. Volgens de speciale relativiteitstheorie is het echter anders:

Ten eerste beginnen we met de vergelijkingen voor de Lorentz-transformatie, afgeleid in de vorige hoofdstukken:

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(ct - \beta x) \quad (1)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x - \beta ct) \quad (2)$$

$$\begin{aligned}y' &= y \\ z' &= z\end{aligned}$$

Hier is:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{en} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

De snelheid v van de oorsprong van systeem A ten opzichte van systeem B is hier in de x -richting.

De relatie tussen systeem B en A:

$$ct = \gamma(ct' + \beta x') \quad (1a)$$

$$x = \gamma(x' + \beta ct') \quad (2a)$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

De snelheid in de x' -richting in systeem A kan worden gevonden door de afgeleide van (2) te nemen:

$$V'_x = \frac{dx'}{dt'} = \gamma \left(\frac{\partial x}{\partial t} \frac{dt}{dt'} - \beta c \frac{dt}{dt'} \right) = \gamma \left(\frac{\partial x}{\partial t} - \beta c \right) \frac{dt}{dt'} = \gamma (V_x - \beta c) \frac{dt}{dt'} \quad (3)$$

De afgeleide van (1):

$$c \frac{dt'}{dt} = c = \gamma \left(c \frac{dt}{dt'} - \beta \frac{\partial x}{\partial t} \frac{dt}{dt'} \right) = \gamma \left(c - \beta \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{dt}{dt'} = \gamma (c - \beta V_x) \frac{dt}{dt'}$$

Hieruit volgt:

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c} \right)} \quad (4)$$

Vul (4) in in (3):

$$V'_x = \frac{\gamma (V_x - \beta c)}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c} \right)} = \frac{V_x - \beta c}{1 - \frac{\beta V_x}{c}} \quad (5)$$

Snelheid in de y'-richting:

$$V'_y = \frac{\partial y'}{\partial t'} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{dt}{dt'} = V_y \frac{dt}{dt'} = \frac{V_y}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c} \right)}$$

Dus:

$$V'_y = \frac{V_y}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c} \right)} \quad (6)$$

Op dezelfde manier voor de z'-richting:

$$V'_z = \frac{V_z}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c} \right)} \quad (7)$$

Kijk nu naar vergelijking (4):

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c} \right)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v V_x}{c^2}}$$

In het speciale geval waarin $V'_x = 0$ dan is $V_x = v$:

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow dt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \text{ dus } dt' \ll dt$$

Terug naar het algemene geval:

Voor de X-component (5):

$$V'_x = \frac{V_x - \beta c}{1 - \frac{\beta V_x}{c}} = \frac{V_x - v}{1 - \frac{v V_x}{c^2}}$$

Of:

$$V_x = \frac{V'_x + v}{1 + \frac{vV'_x}{c^2}}$$

Een soortgelijke afleiding via vergelijkingen (1a) en (2a) geeft:

$$V_x = \frac{V'_x + \beta c}{1 + \frac{\beta V'_x}{c}} \quad (5a)$$

$$V_y = \frac{V'_y}{\gamma \left(1 + \frac{\beta V'_x}{c}\right)} \quad (6a)$$

$$V_z = \frac{V'_z}{\gamma \left(1 + \frac{\beta V'_x}{c}\right)} \quad (7a)$$

Dus, via Newton zouden we in de x -richting een toegevoegde snelheid hebben van:

$$V'_x + v$$

maar volgens de speciale relativiteitstheorie wordt het Newton-resultaat gecorrigeerd naar:

$$\frac{V'_x + v}{1 + \frac{vV'_x}{c^2}}$$

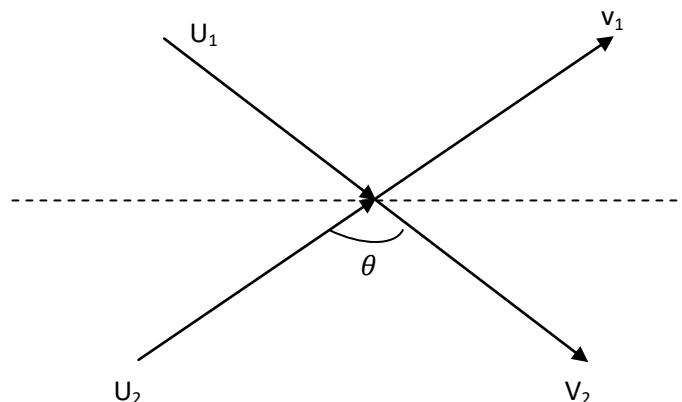
In het algemeen, wanneer de term vV'_x veel kleiner is dan c^2 , kunnen we het resultaat benaderen met het Newton-resultaat $V'_x + v$.

Appendix 7.5 Botsingen

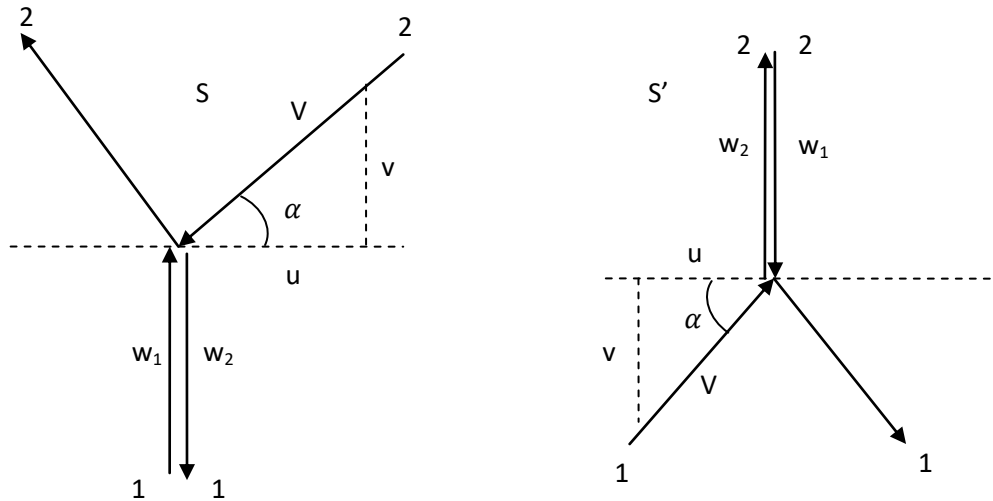
Stel een perfect elastische botsing voor tussen twee identieke deeltjes; een elastische botsing is een botsing zonder verlies van kinetische energie. De beginsnelheden van de deeltjes zijn respectievelijk $\vec{u}_1$ en $\vec{u}_2$ en na de botsing $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$. Vanwege de impulsbehoud geldt:

$$m_{1u}u_1 + m_{2u}u_2 = m_{1v}v_1 + m_{2v}v_2$$

Hier zijn m_{1u} en m_{2u} de massa's vóór de botsing en m_{1v} en m_{2v} de massa's na de botsing.



Eerst beschouwen we de botsing vanuit een coördinatensysteem dat beweegt met deeltje één. Dan beweegt deeltje 1 naar boven met snelheid w_1 en naar beneden met w_2 . Deze snelheden zijn gelijk, maar tegengesteld. Deeltje 2 heeft snelheid $\vec{V}$ met een x-component u en een y-component v .



Links: Botsing tussen twee identieke deeltjes in een coördinatensysteem S dat meebeweegt met deeltje 1. Rechts: Hetzelfde, maar nu S' dat meebeweegt met deeltje 2.

Nu moeten we de relatie vinden tussen de y-componenten van de impuls van de deeltjes 1 en 2 in systeem S, dus w en v . In het vorige hoofdstuk vonden we de volgende relatie:

$$V'_y = \frac{V_y}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c}\right)}$$

Aangezien:

$$V_y = w \text{ en } V_x = 0$$

krijgen we:

$$v = \frac{w}{\gamma}$$

Vanwege de symmetrie is w hier de snelheid van deeltje 1 in systeem S en de snelheid van deeltje 2 in S' . v is de y-component van deeltje 2 in S en van deeltje 1 in S' .

De totale snelheid van het bewegende deeltje 1 in S en van het bewegende deeltje in S' is hetzelfde, namelijk:

$$V = \sqrt{v^2 + u^2}$$

Het impulsbehoud in de y-richting geeft nu:

$$m_w w - m_v v = -m_w w + m_v v$$

waaruit volgt:

$$m_w w = m_v v$$

Dus:

$$\frac{m_V}{m_w} = \frac{w}{v} = \frac{w}{w/\gamma} = \gamma \quad (1)$$

Stel nu dat de snelheid w zeer klein is. In deze limiet geldt:

$$\lim_{w \rightarrow 0} v = 0 \text{ and } \lim_{w \rightarrow 0} V = u.$$

In dat geval kunnen de relativistische effecten worden verwaarloosd en kan de klassieke uitdrukking voor impuls worden herleid.

Dus:

$$\lim_{w \rightarrow 0} m_w = m$$

Vul dit in (1) in:

$$\lim_{w \rightarrow 0} m_V = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Vanwege impulsbehoud moet de definitie van impuls worden aangepast. Deze relativistische uitbreiding is:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

Appendix 7.6 De afleiding van $E=mc^2$

Einstein vond de vergelijking $E=mc^2$ door middel van zijn zogenaamde gedachte-experimenten:

Er is een stationaire doos die in de ruimte zweeft, niet beïnvloed door enige zwaartekracht. Wanneer aan de linkerkant een foton wordt uitgezonden dat naar rechts beweegt, zal de doos een beetje naar links bewegen vanwege de impulsbehoudswet. Op een bepaald moment botst het foton tegen de rechterkant van de doos, waarbij al zijn impuls aan de doos wordt overgedragen. Door de impulsbehoudswet stopt de doos met bewegen.

Het foton heeft zich verplaatst en de doos is ook bewogen, terwijl er geen externe krachten aanwezig waren. Dus het massamiddelpunt van het systeem verandert niet van locatie.

Zoals we weten, is de energie van een foton $E=h\nu$, waarbij ν de frequentie van het licht is. De impuls van een foton is omgekeerd evenredig met de golflengte λ en wordt gegeven door $p = h/\lambda$. De golflengte is $\lambda = cT = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \lambda\nu = c$. (T is de tijd van één periode).

$$E = h\nu = p\lambda\nu = pc$$

Dus de impuls van het foton is:

$$p_{\text{photon}} = \frac{E}{c}$$

De doos met massa M zal een beetje in de tegenovergestelde richting bewegen met snelheid v .

De impuls van de doos is:

$$p_{\text{box}} = Mv$$

In de tijd Δt zal het foton de andere kant bereiken. In deze tijd heeft de doos zich verplaatst over Δx . De snelheid van de doos is:

$$v = -\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Vanwege de wet van behoud van impuls geldt $p_{photon} + p_{box} = 0 \Rightarrow p_{box} = -p_{photon}$.

Dus:

$$M \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{E}{c}$$

De lengte van de doos is L en de tijd die het foton nodig heeft om de andere kant van de doos te bereiken is:

$$\Delta t = \frac{L}{c}$$

Dus:

$$M\Delta x = \frac{EL}{c^2}$$

Stel, hypothetisch, dat het foton enige massa m heeft. Dan kan het massamiddelpunt van het hele systeem worden berekend. Als de positie van de doos x_1 is en het foton positie x_2 heeft, dan is het massamiddelpunt van het systeem:

$$\bar{x} = \frac{Mx_1 + mx_2}{M + m}$$

Het is vereist dat het massamiddelpunt van het hele systeem niet verandert. Dus het massamiddelpunt moet aan het einde van het experiment hetzelfde zijn als aan het begin:

$$\frac{Mx_1 + mx_2}{M + m} = \frac{M(x_1 - \Delta x) + mL}{M + m}$$

Het foton start bij $x_2 = 0$, dus krijgen we:

$$mL = M\Delta x$$

Nu krijgen we:

$$mL = \frac{EL}{c^2}$$

Met enige herschikking:

$$**E = mc^2**$$

Opmerking:

Het lijkt erop dat in deze afleiding een benadering is gemaakt, want wanneer het foton de andere kant van de doos bereikt, is de doos een stukje Δx in de tegenovergestelde richting verplaatst, zodat het totale pad van het foton $L - \Delta x$ is, en niet alleen L . Bovendien is er ook een relativistisch effect, de Lorentzcontractie vanwege de snelheid v van de doos. Dus het pad wordt:

$$L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta x$$

Dit leidt tot:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta x}{c} \\ M \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{E}{c} \\ M \Delta x &= \frac{E}{c} \Delta t\end{aligned}$$

Dus:

$$M \Delta x = \frac{E \left(L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta x \right)}{c^2}$$

Nu:

$$\begin{aligned}\frac{Mx_1 + mx_2}{M + m} &= \frac{M(x_1 - \Delta x) + m \left(L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta x \right)}{M + m} \\ \Rightarrow -M \Delta x + m \left(L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta x \right) &= 0 \\ m \left(L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta x \right) &= M \Delta x = \frac{E \left(L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta x \right)}{c^2} \\ \frac{E \left(L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta x \right)}{c^2} &= m \left(L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta x \right) \\ \mathbf{E} &= \mathbf{mc^2}\end{aligned}$$

Gelukkig eindigt het in dezelfde vergelijking pfff....

Appendix 7.7 De Energie van een Bewegend Object

Met het gedachte-experiment toonde Einstein aan dat energie en massa equivalent zijn via de relatie $E = mc^2$. We hebben laten zien dat voor een object dat met een snelheid beweegt, de impuls moet worden aangepast aan de relativistische beschrijving:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

Dus kan worden gesteld dat de energie van een object gelijk is aan:

$$E = \gamma mc^2.$$

Dus:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Met de Taylorreeksontwikkeling:

$$E = \gamma mc^2 \approx mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{3v^4}{8c^4} \dots \dots \right)$$

Als v veel kleiner is dan c , kunnen de derde en volgende termen binnen de haakjes worden verwaarloosd. Dit leidt tot:

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Dus dit is de kinetische energie $\frac{1}{2}mv^2$ plus een constante mc^2 .

Appendix 7.8 Energie-Impulsvector

Zoals gevonden door Minkowski:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1)$$

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2} \right)$$

$$d\tau^2 = dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

Aangezien:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2}$$

$$d\tau^2 = dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{dt^2}{\gamma^2}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{dt}{d\tau}$$

Uit (1) we afleiden:

$$c^2 = c^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} - \frac{dx^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2} - \frac{dy^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2} - \frac{dz^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2}$$

$$m_0^2 c^2 = m_0^2 c^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} - m_0^2 \frac{dx^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2} - m_0^2 \frac{dy^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2} - m_0^2 \frac{dz^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2}$$

$$m_0^2 c^2 = \gamma^2 m_0^2 c^2 - \gamma^2 m_0^2 v_x^2 - \gamma^2 m_0^2 v_y^2 - \gamma^2 m_0^2 v_z^2$$

$$p^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$$

$$p_0 = \frac{E}{c}$$

$$p_1 = p_x$$

$$p_2 = p_y$$

$$p_3 = p_z$$

$$p^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - |\vec{p}|^2 = m_0^2 c^2$$

$$E^2 - c^2 |\vec{p}|^2 = m_0^2 c^4$$

$$E = \pm \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 |\vec{p}|^2}$$

Of:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 |\vec{p}|^2$$

Waarbij:

$$p = \gamma m_0 v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

En m_0 de rustmassa is (massa bij snelheid nul)

Of via de relatie:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Nu verder delen:

$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 c^4 \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dus:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

Of zoals men gebruikelijk schrijft:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

Waarbij dus:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Appendix 7.8.1

Alternatieve afleiding van de Energie-Impuls-Massa relatie

$$p = mv$$

$$p = \gamma m_0 v = \gamma m_0 c^2 \frac{v}{c^2}$$

$$pc = \gamma m_0 c^2 \frac{v}{c} = \beta \gamma m_0 c^2$$

Hier is:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ and } \beta = \frac{v}{c}$$

Nu, met gebruik van bovenstaande, bekijken we wat er gebeurt:

$$(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 = (\beta \gamma m_0 c^2)^2 + (m_0 c^2)^2$$

$$(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 = (m_0 c^2)^2 (\beta^2 \gamma^2 + 1)$$

$$(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 = (m_0 c^2)^2 \left(1 + \beta^2 \frac{1}{1 - \beta^2}\right)$$

$$(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 = (m_0 c^2)^2 \left(\frac{1 - \beta^2 + \beta^2}{1 - \beta^2}\right) = (m_0 c^2)^2 \left(\frac{1}{1 - \beta^2}\right) = (m_0 c^2)^2 \gamma^2$$

$$(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 = (m_0 c^2)^2 \gamma^2 = (\gamma m_0 c^2)^2 = E^2$$

Dus:

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

Appendix 7.8.2

Klassiek Bewijs van Energieconservatie

Energie is de som van kinetische energie K en potentiële energie U :

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U$$

Tijdafgeleide en partiële afgeleide voor een eendimensionale situatie:

$$\frac{dE}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} = mva + v \frac{dU}{dx}$$

De kracht op een deeltje, volgens het principe van potentiële energie, is gerelateerd aan de afgeleide van de potentiële energie, $U(x)$:

$$F = - \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{dE}{dt} = v \left(ma + \frac{dU}{dx} \right) = v(ma - F)$$

We weten dat volgens Newton:

$$F = ma$$

Dus:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = \text{constant}$$

De energie E is dus geconserveerd.

Appendix 7.9 Toepassingen

Appendix 7.9.1 Kernfusie en Kernsplijting

Wanneer een proton p en een neutron n bij elkaar worden gebracht, kunnen ze samensmelten en een kern (nucleus) van deuterium (ook wel zwaar water genoemd) d vormen. De massa's van p , n , en d zijn:

$$m_p = 938.27231 \text{ MeV}/c^2$$

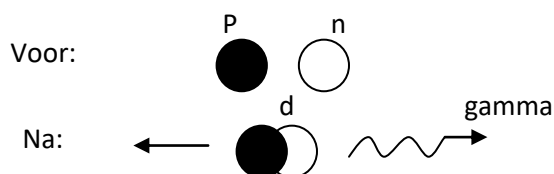
$$m_n = 939.56563 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_d = 1875.61339 \text{ MeV}/c^2$$

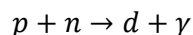
De gebruikte eenheid $\frac{\text{MeV}}{c^2}$ vereist enige toelichting. Vanuit de relatie $E = mc^2$ kunnen we zien dat massa kan worden uitgedrukt in eenheden van energie gedeeld door een constante c^2 (de lichtsnelheid). In 'MKSA' -eenheden is de eenheid van energie de Joule, maar het is ook mogelijk, en gebruikelijk in de deeltjesfysica, om de elektronvolt (eV) te kiezen. Een elektronvolt is de hoeveelheid energie die een eenheidslading krijgt wanneer deze een potentiaalverschil van 1 Volt passeert. De eenheidslading (lading van het elektron) is gelijk aan $1.6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb, dus $1\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{J}$, $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{eV}$.

Omdat de massa van het deutron (= deuteriumkern) kleiner is dan de som van de massa's van de componenten, proton en neutron, moet er energie zijn vrijgekomen! Als p en n met verwaarloosbare snelheid bij elkaar worden gebracht, is de vrijgekomen energie gelijk aan:

$$\begin{aligned} E &= m_p c^2 + m_n c^2 - m_d c^2 \\ &= 2.22455 \text{ MeV} \end{aligned}$$



Deze energie wordt vrijgegeven in de vorm van een foton:



Een foton is massaloos; het is een quantum van het elektromagnetische veld, geïntroduceerd door Einstein om het foto-elektrisch effect te verklaren; het krijgt het symbool γ . Niet alle ontbrekende massa gaat naar de energie van het foton. Zelfs als p en n voor de reactie ten opzichte van elkaar in rust zijn, zal de γ na de reactie met de lichtsnelheid wegvliegen. En om de impulsconservatie te waarborgen, zal d in de tegenovergestelde richting bewegen met dezelfde impuls (zie bovenstaande figuur). Vanwege de grootte van de massa van d is de energie die hiermee samenhangt erg klein.

$$\text{Omdat als } pc \ll mc^2, \text{ dan } E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \cong mc^2$$

De hierboven beschreven reactie is een voorbeeld van **kernfusie**. Over het algemeen blijkt dat lichte kernen (nuclei) kunnen samensmelten tot zwaardere kernen terwijl energie wordt vrijgegeven, zoals in het bovenstaande voorbeeld.

Alle kernen tot en met ijzer kunnen worden geproduceerd via fusie terwijl energie wordt vrijgegeven.

Het tegenovergestelde effect is dat zwaardere kernen, zoals het bekende voorbeeld van Uranium, zwaarder zijn dan de som van de componenten van de kern. In dat geval wordt er alleen energie vrijgegeven wanneer de kernen worden gesplitst (kernsplijting, **kernfissie**).

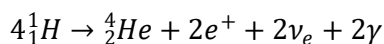
Appendix 7.9.2 Elektrische Auto Rijden op 1 gram Waterstof door middel van Kernfusie

We gaan hier kijken naar kernfusie zoals dat in de zon gebeurt waarbij vier waterstof atomen fuseren tot een helium atoom. In dit fusie proces verdwijnt massa die omgezet wordt naar energie. We berekenen nu hoe groot deze energie is en wat dat praktisch betekent.

Om te bepalen hoeveel kilometers je kunt rijden op 1 gram waterstof door middel van kernfusie, moeten we een aantal stappen doorlopen om de energie die door kernfusie wordt gegenereerd te berekenen en vervolgens om te zetten in praktische rijafstand.

1. Energieopbrengst van kernfusie:

De fusie van waterstofkernen, zoals in de zon, gaat meestal via de proton-protoncyclus. De netto reactie is:



In dit proces, waarbij vier waterstofatomen worden omgezet naar een heliumatoom, is het totaal gewicht van de 4 waterstofatomen groter dan het gewicht van het heliumatoom. Er is dus een beetje massa verdwenen. Door toepassing van de formule $E = mc^2$ kan er berekend worden hoeveel massa hierbij omgezet wordt tot energie.

De energie die vrijkomt bij deze reactie is ongeveer 26,7 MeV (Mega-elektronvolt) per fusie van vier waterstofatomen tot één heliumatoom.

1 gram waterstof bevat ongeveer $6,022 \times 10^{23}$ (getal van Avogadro) waterstofatomen (1 mol). Dus, in 1 gram waterstof hebben we $\frac{6,022 \times 10^{23}}{4} \approx 1,505 \times 10^{23}$ fusie-reacties.

Elke fusie-reactie geeft 26,7 MeV aan energie, dus totale energie:

$$E_{fusie} = 1,505 \times 10^{23} \times 26,7 \text{ MeV}$$

2. Omzetten van MeV naar Joules:

Een Joule is gelijk het verplaatsen van een lading van 1 Coulomb in een veld van 1 Volt. Dus

$$\text{Joule} = qV$$

De lading van een elektron e is $1,60218 \times 10^{-19} \text{ Coulomb}$.

Dus:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Joule} &= \frac{1}{1,60218 \times 10^{-19}} \text{ eV} \\ \Rightarrow \text{eV} &= 1,602 \times 10^{-19} \text{ Joules} \end{aligned}$$

Dus:

$$1 \text{ MeV} = 1,60218 \times 10^{-13} \text{ Joules}$$

Dus per 1 gram waterstof is de totale energie in Joules:

$$E_{tot} = 1,505 \times 10^{23} \times 26,7 \times 1,60218 \times 10^{-13} \approx 6,43 \times 10^{11} \text{ Joules}$$

3. Berekening van de energie:

$$E_{tot} \approx 6,43 \times 10^{11} \text{ Joules per gram waterstof}$$

Dit is dus de energie die vrijkomt in dit proces, waarbij dus een klein gedeelte van de massa wordt omgezet naar energie.

Ter vergelijking kunnen we kijken naar de theoretische berekening wanneer 1 gram materie totaal wordt omgezet volgens $E = mc^2$:

$$E = \frac{1}{1000} \times (3 \times 10^8)^2 \approx 9 \times 10^{13} \text{ Joules}$$

Dus dit scheelt ongeveer een factor 140 (of in procenten is fusie 0,7% van de energie bij totale omzetting van 1 gram massa).

4. Alternatieve berekening:

Bij kernfusie wordt 4 mol waterstof omgezet naar 1 mol helium waarbij een hoeveelheid energie vrijkomt. In dit proces gaat een beetje massa verloren die wordt omgezet in energie.

De massa van 4 mol waterstof H is $4 \times 1,00784 = 4,03136$ gram waterstof.

De massa van 1 mol helium He is 4,0026 gram helium.

Dus het massaverschil is $0,02876 \text{ gram} = 2,876 \times 10^{-5} \text{ kg}$.

$$E = mc^2 \text{ waarbij } c = 3 * 10^8 \text{ m/s}$$

De vrijkomende energie is dus:

$$E = 2,876 * 10^{-5} * (3 * 10^8)^2 = 2,588 * 10^{12} \text{ bij } 4,03136 \text{ gram waterstof}$$

Dat is:

$$E = 6,42 * 10^{11} \text{ Joule per } 1 \text{ gram waterstof}$$

5. **Energieverbruik van een elektrische auto:**

Elektrische auto's verbruiken ongeveer 15-20 kWh per 100 km. We nemen hier 17 kWh per 100 km voor gemiddeld gebruik.

- 1 kWh = $3,6 \times 10^6$ Joules.

Dus, 17 kWh = $61,2 \times 10^6$ Joules per 100 km.

6. **Berekening van de theoretische rijafstand:**

Met de theoretisch beschikbare energie kunnen we de afstand berekenen:

$$\text{Afstand} = \frac{6,43 \times 10^{11}}{61,2 \times 10^6} \times 100 \text{ km}$$

$$\text{Afstand} \approx 1,05 \times 10^6 \text{ km}$$

7. **Efficiëntie van energieomzetting:**

Echter de bovenstaande berekening is gebaseerd op een 100% efficiënte energieomzetting. Maar bij de omzetting van energie van kernfusie naar bruikbare elektriciteit, en vervolgens naar de aandrijving van een elektrische auto, moeten we rekening houden met verschillende efficiënties:

- **Efficiëntie van energieomzetting naar elektriciteit:** Laten we aannemen dat deze efficiëntie 40% is (een conservatieve schatting, aangezien kernfusiereactoren nog in ontwikkeling zijn).
- **Efficiëntie van de elektrische aandrijving:** Elektrische auto's hebben doorgaans een efficiëntie van ongeveer 85-90%. We nemen hier 90% voor de berekening.

De totale efficiëntie is dus $0,4 \times 0,9 = 0,36$.

8. **Bruikbare energie:**

De bruikbare energie die uiteindelijk beschikbaar is voor de aandrijving van de auto:

$$E_{\text{bruikbaar}} = 6,43 \times 10^{11} \times 0,36 = 2,31 \times 10^{11} \text{ Joules}$$

9. Berekening van de praktische rijafstand:

Met de praktisch beschikbare energie kunnen we de afstand berekenen:

$$\text{Afstand} = \frac{2,31 \times 10^{11}}{61,2 \times 10^6} \times 100 \text{ km}$$

$$\text{Afstand} \approx 3,77 \times 10^5 \text{ km}$$

Daarom kan een elektrische auto, aangedreven door de energie afkomstig van kernfusie van 1 gram waterstof, theoretisch ongeveer 377 duizend (**377.000**) kilometer rijden. De gemiddelde afstand die men over het algemeen per jaar aflegt is ongeveer 15.000 km dus dat betekent dat men op **1 gram waterstof vijf en twintig (25) jaar kan rijden.**

Appendix 7.10 Relativistische elektromagnetisme

(Berekeningen gebaseerd op Richard Feynman https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_13.html)

Appendix 7.10.1 Inleiding

Het woord elektromagnetisme veronderstelt dat er een elektrisch veld en een magnetisch veld is, en suggereert daardoor dat er bronnen zijn voor beide velden. We weten echter dat de elektrische lading de bron is voor het elektrische veld, en tot nu toe zijn er geen magnetische bronnen gevonden voor het magnetische veld. Het lijkt erop dat een magnetisch veld altijd wordt veroorzaakt door een in de tijd variërend elektrisch veld. Zelfs op microscopische schaal, de kwantschaal, worden magnetische velden veroorzaakt door elektrische spins van elektronen of atomen. Het elektrische veld heeft als bronnen de elektronen ($-1e$) en de protonen ($+1e$).

Misschien kunnen we zo ver gaan dat we kunnen zeggen dat het magnetische veldmodel slechts een zeer nuttig wiskundig hulpmiddel is om het elektromagnetische fenomeen te beschrijven; maar het enige dat er is, is het elektrische veld en de variatie van het elektrische veld op basis van accumulaties van elektronen en protonen.

Appendix 7.10.2 Berekeningen

Als we een voorbeeld nemen van een stroomdrager, kunnen we normaal gesproken met de Maxwell-vergelijkingen het elektrische en magnetische veld berekenen. Een alternatieve benadering is om de berekening volledig op basis van het elektrische veld te doen en het magnetische deel over te slaan.

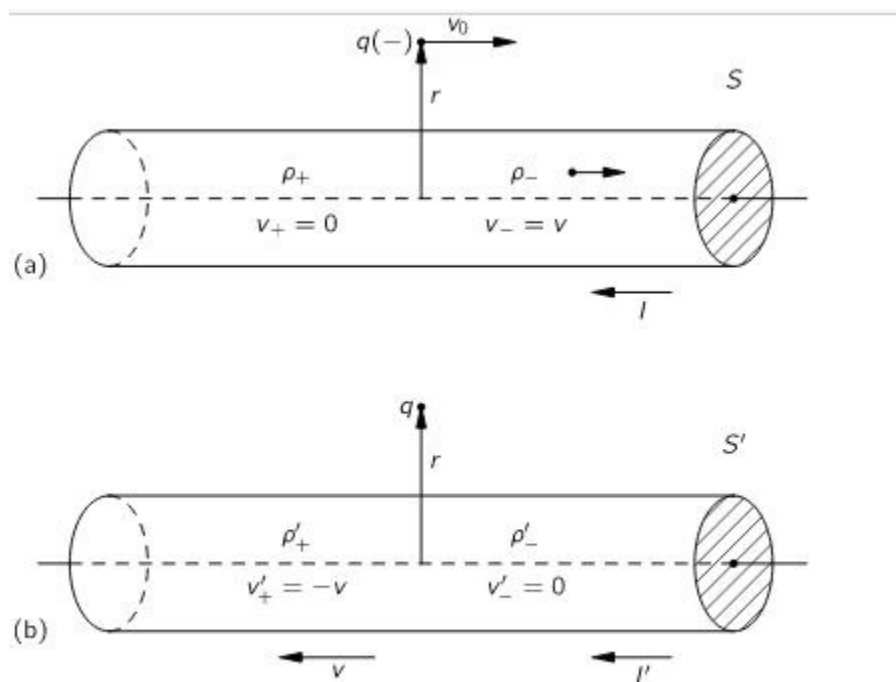


Fig. 1. De interactie van een stroomdrager en een deeltje met de lading q , gezien in twee kaders. In kader S (deel a) is de draad in rust; in kader S' (deel b) is de lading in rust.

We zullen nu enkele formules afleiden voor later gebruik.

De stroomdichtheid is de gemiddelde stroomsnelheid van de ladingen. Stel dat er een verdeling van ladingen is met een gemiddelde beweging met snelheid v . De verdeling passeert over een oppervlakte-element ΔS , de lading Δq die door het oppervlaktelement in een tijd Δt gaat, is gelijk aan de lading:

$$\Delta q = \rho v \cdot n \Delta S \Delta t \quad (1)$$

Hier is ρ de ladingsdichtheid: de lading per eenheid volume.

Hier kan $v \Delta t \cdot \Delta S$ als een volume worden beschouwd. Dus, de lading is de ladingsdichtheid vermenigvuldigd met het volume.

De lading per tijdseenheid is dan $\rho v \cdot n \Delta S$, wat geeft:

$$j = \rho v \quad (2)$$

De totale stroom door het oppervlak S is:

$$i = j \cdot S \quad (3)$$

We beschouwen nu een stroomdrager die in rust is en elektronen, negatief geladen deeltjes, die met een snelheid v naar rechts bewegen. De protonen, positief geladen deeltjes, blijven in rust in de draad. Een testdeeltje, met een negatieve lading q , beweegt met dezelfde snelheid als de elektronen naar rechts. We observeren het geheel in rust ten opzichte van de draad. De totale draad distribueert alle ladingen zodanig dat deze neutraal is.

Laten we de externe kracht, van de draad, beschouwen die kan worden veroorzaakt door de elektrische en magnetische velden:

$$F = q(E + v \times B)$$

$$B = \mu_0 H$$

Het magnetische veld rondom de draad is:

$$H = \frac{i}{2\pi r}$$

Beschouw de kracht op het testdeeltje waar het elektrische veld nul is omdat de totale lading in de draad neutraal is:

$$F = q(v \times B) = qvB \sin \varphi$$

Aangezien v loodrecht staat op B dan $\sin \varphi = 1$

$$F = qvB = qv\mu_0 H = \frac{qv\mu_0 i}{2\pi r}$$

De ladingsdichtheid ρ is gedefinieerd als de totale lading in een volume gedeeld door de grootte van het volume V :

$$\rho = \frac{q}{V}$$

Als A de oppervlakte is van de dwarsdoorsnede van de draad en L is de arbitrair gekozen lengte van het volume, in rust, langs de draad, dan:

$$q = \rho AL$$

Wanneer de draad in rust is:

$$\rho_+ + \rho_- = 0$$

Als we nu de situatie vanuit het perspectief van het testdeeltje beschouwen, is het testdeeltje in rust en beweegt de draad naar links met een snelheid v .

Het volume wordt bepaald door A en zijn lengte L . De lengte tussen een bewegend volume en een volume in rust is:

$$L_{moving} = L_{rest} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Aangezien de snelheid van de elektronen hetzelfde is als de gekozen snelheid van het testdeeltje, zijn de elektronen nu ook in rust. Dit betekent dat:

$$L_{rest} = \frac{L_{moving}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Omdat de draad nu een snelheid van v naar links heeft, bewegen de positieve deeltjes ook met v naar links en verandert de lengte L van het volume met de factor:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Wanneer de draad in rust was, was het externe elektrische veld buiten de draad:

$$\rho_+ + \rho_- = \rho_+ - \rho_+ = 0$$

Omdat de bewegende lengte kleiner is dan de rustlengte, is het bewegende volume ook kleiner. Dus dan is de dichtheid van de geladen deeltjes groter. Dus, als we de ladingsdichtheid beschouwen wanneer het testdeeltje in rust is, moeten we de bewegende dichtheid ρ_- vermenigvuldigen met

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dus, nu wordt het elektrische veld buiten de draad bepaald door de totale ladingsdichtheid:

$$\begin{aligned} \rho_{netto} &= \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \rho_- \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \rho_+ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \rho_+ \frac{1 - 1 + \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \rho_{netto} &= \rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Het volume van een lengte L van de draad geeft een lading van:

$$q = \rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} AL$$

Dus, het elektrische veld buiten de draad is niet nul en staat loodrecht op de draad. Als we een buis rond de draad van lengte L en afstand van de as van de draad van r beschouwen, is het volume:

$$E = \rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{2\pi\epsilon_0 r L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} AL = \rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} A$$

Dus:

$$F' = qE = q\rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} A \quad (4)$$

Voor v veel kleiner dan c :

$$F' = qE = q\rho_+ \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{v^2}{c^2} A$$

Voor het magnetische veld in de rustsituatie was:

$$F = qvB = qv\mu_0 H = \frac{qv\mu_0 i}{2\pi r} \quad (5)$$

Dit geeft, wanneer J de stroomdichtheid door de draad is en $J = \rho v$:

$$\begin{aligned} F &= \frac{qv\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{qv\mu_0 JA}{2\pi r} \\ c^2 &= \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Rightarrow \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \\ F &= \frac{qv\mu_0 JA}{2\pi r} = \frac{qv\rho v A}{2\pi r \epsilon_0 c^2} = \frac{qv\rho v A}{2\pi r \epsilon_0 c^2} = q\rho \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{v^2}{c^2} A \end{aligned} \quad (6)$$

Dus uit de vergelijkingen (4) en (6) volgt:

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

De krachten werken in de transversale y -richting, dus de impuls in de y -richting en de y' -richting moet hetzelfde zijn omdat de transversale snelheid nul is.

Nu vergelijken we de impuls in de y en de y' -richting:

$$\Delta p_y = F \Delta t$$

En

$$\Delta p'_y = F' \Delta t'$$

Zoals we weten, lijkt de tijd voor een bewegend deeltje langzamer te gaan dan die in het rustsysteem van het deeltje, dus:

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
\Delta p_y &= \Delta p'_y = F \Delta t = F \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = F' \Delta t' \\
\Rightarrow F' &= \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7)
\end{aligned}$$

Dus nu is aangetoond, met vergelijkingen (5) (6) en (7), dat:

$$F = qvB = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} F' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} qE$$

Appendix 7.10.3 **Conclusie**

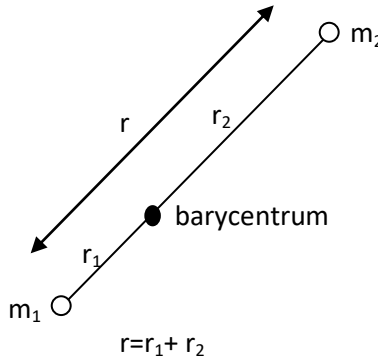
We hebben gevonden dat we hetzelfde fysieke resultaat krijgen, ongeacht of we de beweging van een deeltje dat langs een draad beweegt analyseren in een coördinatensysteem dat in rust is ten opzichte van de draad, of in een systeem dat in rust is ten opzichte van het deeltje. In de eerste instantie was de kracht puur “magnetisch,” terwijl deze in de tweede instantie puur “elektrisch” was. Dit toont ook aan dat magnetisme in feite een relativistisch effect is.

Appendix 8 Specifiek Hoekmoment

In dit document, en vooral waar we de Schwarzschild-vergelijking gebruiken, wordt de term hoekmoment gebruikt. Dit wordt aangeduid met de vorm $L = mr^2 \frac{d\phi}{dt}$ (Omdat: $L = mvr = mrv = mr \frac{rd\phi}{dt} = mr^2 \frac{d\phi}{dt}$).

Het is echter niet het werkelijke hoekmoment, maar een benadering. Hierna volgt een toelichting.

In de Schwarzschild-formule is er een relatie tussen een deeltje en een groot, massief lichaam. Het gekozen referentiekader is het centrum van het grote, massieve lichaam. Het is dus een soort tweelichamenprobleem. Laten we nu het hoekmoment voor een tweelichamenprobleem bekijken.



De twee lichamen draaien om elkaar en het zwaartepunt wordt het barycentrum genoemd. De voorwaarde van de cirkelvormige lichamen is dat:

$$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{m_2 v_2^2}{r_2} \quad (1)$$

Om symmetrie van de krachten te waarborgen, moeten de massa's aan tegenovergestelde zijden van het barycentrum blijven. De periodes van de banen moeten dus gelijk zijn:

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1} = \frac{2\pi r_2}{v_2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (2)$$

$$v_1 = \frac{r_1}{r_2} v_2 = \frac{r_1}{r_2} (v - v_1) \quad (3)$$

$$v_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) = \frac{r_1}{r_2} v \Rightarrow v_1 = \frac{r_1}{r} v \quad (4)$$

En op dezelfde manier:

$$v_2 = \frac{r_2}{r_1} v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{r_2}{r} v \quad (5)$$

De snelheid van m_2 ten opzichte van m_1 is:

$$v = v_1 + v_2 \quad (6)$$

Vul (3) in (1):

$$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{m_1 v_2^2}{r_1} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{m_2 v_2^2}{r_2} \Rightarrow \frac{m_1}{r_1} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{m_2}{r_2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{m}_1 \mathbf{r}_1 = \mathbf{m}_2 \mathbf{r}_2 \quad (7)$$

$$m_2 r_2 = m_1 (r - r_2) = m_1 r - m_1 r_2$$

$$r_2 (m_1 + m_2) = m_1 r \Rightarrow \mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{m}_1}{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2} \mathbf{r} \quad (8)$$

Laten we het hoekmoment van m_2 ten opzichte van m_1 berekenen.

$$L_2 = m_2 v_2 r_2 = m_2 \frac{r_2}{r} v \frac{m_1}{m_1 + m_2} r = m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} r_2 v = m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v r \quad (9)$$

$$L_2 = \frac{1}{m_2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \omega r^2 \quad (10)$$

$$L_1 = \frac{1}{m_1} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \omega r^2 \quad (11)$$

Het totale hoekmoment van de twee lichamen:

$$L = L_2 + L_1 = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \omega r^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \omega r^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega r^2$$

Om het in lijn te brengen met de Schwarzschild-vergelijking:

$$L = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \frac{d\Phi}{d\tau} \quad (12)$$

We noemen m de gereduceerde massa.

$$m = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} \quad (13)$$

Het specifieke hoekmoment h is:

$$h = \frac{L}{m} = r^2 \frac{d\Phi}{d\tau} \quad (14)$$

In het geval dat m_1 staat voor een grote massa M en m_2 de massa van een deeltje, dan:

$$\frac{m_2 M}{M + m_2} \Rightarrow m_2 \quad (15)$$

Dus, als $M \gg m_2$, dan wordt de massa in de hoekmoment-vergelijking bepaald door de massa van het deeltje alleen.

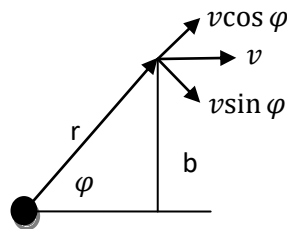
Appendix 9 Overwegingen over Rotatie

Appendix 9.1 Inleiding

Hieronder zullen we een toelichting geven op de centrifugale en centripetale kracht, eerst gebaseerd op Newton, en later breiden we dit uit naar de Algemene Relativiteitstheorie. De centrifugale kracht is de kracht die van het rotatiecentrum naar buiten werkt. De centripetale kracht is naar het centrum gericht.

Appendix 9.2 Impuls

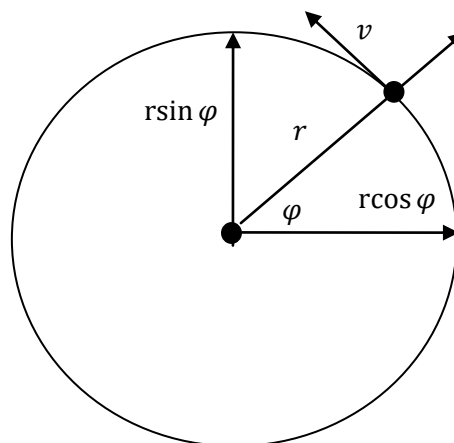
Volgens Newton heeft een bewegend deeltje met massa m en een snelheid v een impuls van mv ; als er geen krachten op het deeltje werken, zal het deeltje uniform bewegen in een rechte lijn met snelheid v . Ten opzichte van een punt op afstand r heeft het deeltje een impulsmoment $m\vec{v} \times \vec{r}$.



In de bovenstaande afbeelding is het impulsmoment $L = m v \sin \varphi \cdot r = mvr \sin \varphi$ of $L = mvb$.

Appendix 9.3 Cirkel

Zoals eerder gezegd zal het deeltje uniform in een rechte lijn bewegen, dus als de baan van het deeltje een cirkel is, is er een kracht nodig.



We beginnen met een constante straal r en splitsen dit op in de x- en y- componenten. Vanaf daar berekenen we de circulaire snelheid en versnelling:

$$x = r \cos \varphi = r \cos \omega t$$

$$y = r \sin \varphi = r \sin \omega t$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega r \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \omega r \cos \omega t$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 r \cos \omega t$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 r \sin \omega t$$

De totale kracht is:

$$F = m \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = -m\omega^2 r$$

Dus, het deeltje wil langs een rechte lijn bewegen, maar door zijn rotatie voelt het een loodrechte naar buiten gerichte kracht $F = m\omega^2 r$. Zoals hierboven is aangetoond, moet deze kracht worden gecompenseerd door een centripetale reactiekracht $F = -m\omega^2 r$, dus in de richting van het centrum, om het deeltje op zijn cirkelbaan te houden.

Appendix 9.4 Rotatie van een Bol

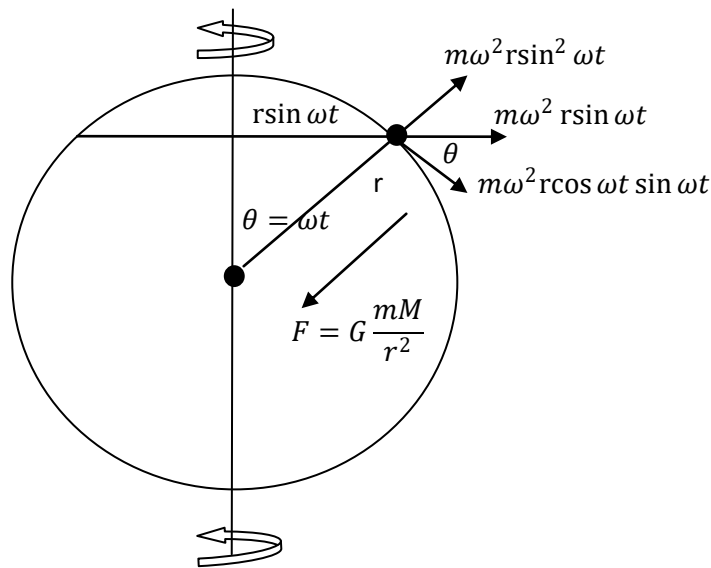


Fig. 3

In principe beschouwen de bol bestaande uit vele deeltjes maar we beschouwen nu in eerste instantie het gedrag van één deeltje ergens op de bol.

Het deeltje roteert rond de verticale as en ondervindt een horizontale centrifugale kracht van:

$$m\omega^2 r \sin \omega t$$

Dit geeft een centrifugale kracht in de radiale richting van de bol van:

$$m\omega^2 r \sin^2 \omega t$$

Samen met de centripetale kracht resulteert dit in de volgende kracht:

$$G \frac{mM}{r^2} - m\omega^2 r \sin^2 \omega t = m \left(\frac{GM}{r^2} - \omega^2 r \sin^2 \omega t \right)$$

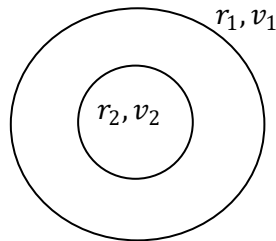
Daarnaast is er een tangentiële kracht richting de evenaar van:

$$m\omega^2 r \cos \omega t \sin \omega t$$

Deeltjes zullen dus een kracht voelen richting de evenaar, wat ervoor zal zorgen dat de bol vervormt naar een ellipsoïde. Dit betekent dat de afstand van het centrum tot het deeltje het kortst is bij de polen en het langst bij de evenaar; hierdoor verschilt de zwaartekracht per locatie. De zwaartekracht is ook afhankelijk van de ingesloten massa; aangezien de afstand van de polen tot het centrum het kleinst is, is de ingesloten massa daar het kleinst. Dus, de zwaartekracht bij de polen neemt toe vanwege de kleinere afstand, maar neemt af vanwege de ingesloten massa. De vervorming van de bol zal resulteren in een ellipsoïde waar evenwicht is bereikt.

(zie ook: <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/Newton/node109.html>).

Appendix 9.5 Relatie tussen Hoekmoment en Energie



Verschil in kinetische energie van de twee cirkels:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 \quad (1)$$

Het hoekmoment is constant, dus:

$$\begin{aligned} m v_1 r_1 &= m v_2 r_2 \\ v_2 &= \frac{v_1 r_1}{r_2} \end{aligned} \quad (2)$$

Nu (2) in (1):

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m \left(\frac{v_1 r_1}{r_2} \right)^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \quad (3)$$

Dit energieverschil ΔK moet worden geleverd door de centripetale kracht:

$$F = -\frac{m v^2}{r}$$

Energie is:

$$\int_{r_2}^{r_1} F dr = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{m v^2}{r} dr$$

Het hoekmoment is constant, dus:

$$mvr = \text{Const}$$

$$v = \frac{\text{Const}}{mr}$$

$$\begin{aligned} \int_{r_2}^{r_1} F dr &= - \int_{r_2}^{r_1} \frac{m}{r} \frac{\text{Const}^2}{m^2 r^2} dr = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{\text{Const}^2}{mr^3} dr = \frac{\text{Const}^2}{2mr^2} \Big|_{r_2}^{r_1} = \frac{\text{Const}^2}{2m} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \\ &= \frac{m^2 v_1^2 r_1^2}{2m} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = \frac{1}{2} m v_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

We zien dat formule (3) en (4) gelijk zijn, dus:

$$\Delta K = \int_{r_2}^{r_1} F dr = \frac{1}{2} m v_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)$$

Appendix 10 Afleiding van de Euler-Lagrange-vergelijking

We beginnen met een functie f_1 die afhangt van drie variabelen: t , x_1 en $\frac{dx_1}{dt}$:

$$f_1 = f \left(t, x_1(t), \frac{dx_1(t)}{dt} \right) \quad \text{of} \quad f_1 = f(t, x_1, \dot{x}_1) \quad (1)$$

Hier is x_1 een functie van t , dus $\frac{dx_1(t)}{dt}$ is niet nul. In principe is t de enige variabele die de functie f_1 bepaalt. Dus f_1 is een functie van een functie.

Nu beschouwen we de functie f_1 tussen de punten t_1 en t_2 . We integreren nu f_1 tussen deze punten:

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} f_1 dt \quad (2)$$

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} f \left(t, x_1(t), \frac{dx_1(t)}{dt} \right) dt$$

Om de extreme waarde (maximum, zadelpunt of minimum) van I_1 te vinden, geldt:

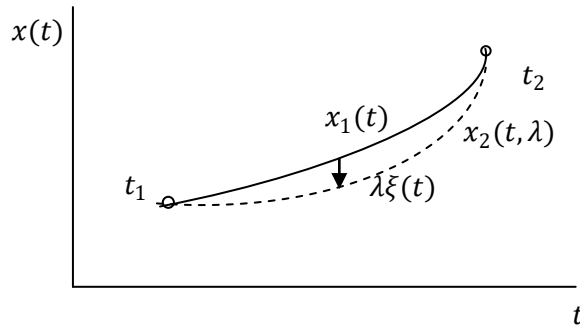
$$\delta I_1 = 0 \quad (3)$$

Om te bewijzen dat I_1 een extreem is, beschouwen we een curve $x_2(t)$ die iets verschoven is, zodat I_2 niet extreem is:

$$x_2(t, \lambda) = x_1(t) + \lambda \xi(t) \quad (4)$$

Hierin is λ een parameter die onafhankelijk is van t . Omdat we een curve beschouwen die loopt van t_1 naar t_2 , verschilt $x_2(t)$ van $x_1(t)$ tussen deze punten, maar op de punten t_1 en t_2 geldt $x_1(t) = x_2(t)$. Dus:

$$\xi(t_1) = 0 \text{ en } \xi(t_2) = 0 \quad (5)$$



Nu is de integraal I_2 voor de aangrenzende curve:

$$I_2 = \int_{t_1}^{t_2} f_2 dt \quad (6)$$

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} f \left(t, x_2(t, \lambda), \frac{dx_2(t, \lambda)}{dt} \right) dt$$

Door (6) in te vullen in vergelijking (4), krijgen we:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{t_1}^{t_2} f \left(t, x_2(t, \lambda), \frac{dx_2(t, \lambda)}{dt} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f \left(t, x_1(t) + \lambda \xi(t), \frac{d(x_1(t) + \lambda \xi(t))}{dt} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f \left(t, x_1(t) + \lambda \xi(t), \frac{dx_1(t)}{dt} + \lambda \frac{d\xi(t)}{dt} \right) dt \end{aligned} \quad (7)$$

Aangezien I_1 een extreme waarde is, is I_2 ook extreem voor $\lambda = 0$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} I_2 = \text{minimum, zadelpunt of maximum} \quad (8)$$

De extreme waarde kan worden gevonden door de afgeleide te nemen en gelijk te stellen aan nul:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{dI_2}{d\lambda} = 0 \quad (9)$$

In combinatie met vergelijking (6):

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d}{d\lambda} \left(\int_{t_1}^{t_2} f_2 dt \right) &= 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\lambda} (f_2 dt) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Dit is een product van twee functies, dus we passen de regel van partiële differentiatie toe:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{df_2}{d\lambda} dt + f_2 \frac{d(dt)}{d\lambda} \right) = 0 \quad (11)$$

Omdat t en λ wederzijds onafhankelijk zijn, is de afgeleide van t naar λ , of vice versa, gelijk aan nul:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{df_2}{d\lambda} dt + f_2 \cdot 0 \right) = 0 \quad (12)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \frac{df_2}{d\lambda} dt = 0$$

Vervolgens passen we de regel van partiële differentiatie toe:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} \frac{dt}{d\lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{dt} \right)}{d\lambda} \right) dt = 0 \quad (13)$$

Door de onafhankelijkheid van t en λ is de eerste term nul:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} \cdot 0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{dt} \right)}{d\lambda} \right) dt = 0 \quad (14)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{dt} \right)}{d\lambda} \right) dt = 0$$

Omdat:

$$\frac{d \left(\frac{dx_2}{dt} \right)}{d\lambda} = \frac{d^2 x_2}{dt d\lambda} = \frac{d \left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right)}{dt} \quad (15)$$

Leidt vergelijking (14), samen met (15), tot:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right)}{dt} \right) dt = 0 \quad (16)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right)}{dt} dt \right) = 0$$

Nu integreren we het rechterlid van deze vergelijking:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right)}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} d \left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right) \quad (17)$$

$$= \left[\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{dx_2}{d\lambda} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_2}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) dt$$

De afgeleide van x_2 naar λ wordt gevonden door differentiatie van vergelijking (4):

$$\frac{dx_2(t, \lambda)}{d\lambda} = \frac{d(x_1(t) + \lambda \xi(t))}{d\lambda} = 0 + \xi(t) = \xi(t) \quad (18)$$

Omdat de functie $\xi(t)$ nul is aan de grenzen van de integraal (zie vergelijking (5)), verdwijnt de linkerkant van de rechterterm in vergelijking (17):

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right)}{dt} dt &= \left[\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{dx_2}{d\lambda} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_2}{dt} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_2}{dt} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) dt \end{aligned} \quad (19)$$

Dit resultaat gecombineerd met vergelijking (16) leidt tot:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right)}{dt} dt \right) &= 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_2}{d\lambda} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) dt \right) &= 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} - \frac{dx_2}{d\lambda} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) \right) dt \right) &= 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) \right) \frac{dx_2}{d\lambda} dt \right) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Om deze integraal nul te maken, stellen we dat:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) \right) &= 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \left(\frac{dx_1}{dt} \right)} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Nus is λ volledig verdwenen en hebben we een algemene uitdrukking verkregen voor de voorwaarde waaraan een functie moet voldoen zodat de integraal I een extreme waarde heeft.

We zijn begonnen met vergelijking (1) voor onze afleiding, maar we zouden dit startpunt nog algemener kunnen maken door een functie te nemen zoals:

$$f_1 = f\left(t, x_1(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, x_2(t), \frac{dx_2(t)}{dt}, \dots, x_n(t), \frac{dx_n(t)}{dt}\right) \quad 22$$

Dit zou hebben geleid tot een meer algemene vorm van vergelijking (21):

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{dx_n}{dt}\right)} \right) = 0 \quad (23)$$

Of in een andere notatie:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_n} \right) = \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad (24)$$

Vergelijking (24) is de **Euler-Lagrange vergelijking**. Het geeft de voorwaarde aan waaraan een functie moet voldoen zodat de integraal I een extreme waarde is.

9 Bibliografie

- Anderson, P. B. (2008, 16 oktober). *A Hafele & Keating like thought experiment*. Verkregen van [https://paulba.no/pdf/H&K like.pdf](https://paulba.no/pdf/H&K%20like.pdf)
- Asmodelle, E. (2017). *Tests of General Relativity: A Review*. University of Central Lancashire (UCLAN).
- Bentvelsen, S. (september 2005 versie 3.0). *Speciale Relativiteitstheorie*. NIKHEF/Onderzoeksinstituut HEF.
- Biesel, O. (2008, 25 januari). *The Precession of Mercury's Perihelion*. Verkregen van <https://sites.math.washington.edu/~morrow/papers/Genrel.pdf>
- Blau, M. (11 june 2018). *Lecture Notes on General Relativity*.
- Blote, H. W. *Introduction to General Relativity*. <http://wwwhome.lorentz.leidenuniv.nl/~henk/grh.pdf>.
- Charles W Misner, K. S. (1932). *Gravitation*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.
- Crowell, B. (11 maart, 2018). *Time distortion arising from motion and gravity*. Libretexts.
- Einstein Relatively Easy*. <http://einsteinrelativelyeasy.com/index.php/general-relativity>.
- Einstein, A. (1920). *RELATIVITY - The special and General Relativity*. gemaakt door Jose Menendez.
- Einstein, A. (1916 (herziende editie: 1924)). *Relativity: The Special and General Theory*. Methuen & Vo Ltd.
- Einstein, A. (1997). *The Collected Papers of Albert Einstein*. Princeton University Press.
- Heinicke, Christian en Hehl, Friedrich W. (2015). *Schwarzschild and Kerr Solutions of Einstein's Field Equation*. Dept. Physics & Astron., Univ. of Missouri, Columbia,.
- Hooft, G. ' . *INTRODUCTION TO GENERAL RELATIVITY*. Institute for Theoretical Physics Utrecht University and Spinoza Institute.
- <http://adamauton.com/warp/emc2.html>.
- Janssen, M. *Einstein's First Systematic Exposition of General Relativity*. <https://philpapers.org/rec/JANEFS>.
- M.P Hobson, G. E. (2006). *General Relativity an introduction for Physics*. Cambridge University Press.
- Magnan, C. (n.d.). *Complete calculations of the perihelion precession of Mercury an the degelection of light by the Sun in General Relativity*. Verkregen van <https://arxiv.org/pdf/0712.3709.pdf>
- Oas, G. *Full derivation of the Schwarzschild solution*. EPGY Summer Institute SRGR.
- Pe'er1, A. (2014, 19 february). *Schwarzschild Solution and Black holes*. Verkregen van <http://www.physics.ucc.ie/appeer/PY4112/Sch.pdf>
- Salas, d. C. *Geometric interpretation of Christoffel symbols and some alternative approaches to calculating them*.
- Schwarzschild, K. (13 januari 1916). *On the Gravitational Field of a Point-Mass, According to Einstein's Theory*.
- Schwarzschild, K. (24 february 1916). *On the Gravitational Field of a Sphere of Incompressible Liquid, According to Einstein's Theory*.
- Susskind, L. (2012). *General Relativity*. Stanford University.
- Visser, M. (30 June 2007). *The Kerr spacetime: A brief introduction*. <https://arxiv.org/pdf/0706.0622.pdf>.
- Vlieger, K. d. (2018). http://voorbijeinstein.nl/html/artikel_art.htm. Heeten, Netherlands: Karel de Vlieger.

10 Interessante websites:

http://voorbijeinstein.nl/html/artikel_art_paragraaf_05.htm

<http://star-www.st-and.ac.uk/~hz4/gr/HeavensGR.pdf>

<https://einsteinrelativelyeasy.com/index.php/general-relativity/22-geodesics-and-christoffel-symbols>

http://jamesowenweatherall.com/SCPPRG/LehmkuhlDennis2008Man_MassEnergyMomentumGR.pdf

<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/reh10/lectures/nst-mmii-chapter2.pdf> Chapter 2 Poisson's Equation - University of Cambridge

<http://www.mathpages.com/home/kmath711.htm> Poisson's Equation and the Universe

<https://web.stanford.edu/~oas/SI/SRGR/notes/SchwarzschildSolution.pdf> Gary Oas

<https://ned.ipac.caltech.edu/level5/March01/Carroll3/Carroll7.html>

<http://www.feynmanlectures.caltech.edu/>

<http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf#page577> (Blau, 11 june 2018)

<http://adamauton.com/warp/emc2.html>

<https://web.stanford.edu/~oas/SI/SRGR/notes/SchwarzschildSolution.pdf>

<https://drchristiansalas.com/2017/03/11/geometric-interpretation-of-christoffel-symbols-and-some-alternative-approaches-to-calculating-them/>

<https://stanfordvideo.stanford.edu/leonard-susskinds-general-relativity-lecture-1/>

https://www.youtube.com/playlist?list=PLQrxduI9Pds1fm91Dmn8x1lo-O_kpZGk8

<https://arxiv.org/pdf/0706.0622.pdf>

DE ALGEMENE RELATIVITEITSTHEORIE VAN EINSTEIN

Afleidingen, Toepassingen en Beschouwingen

door
Albert Prins

EINDE

Uw feedback is welkom via:

aprins@hotmail.com